24 Dimension d'un s.e.v de $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul.

Pour bien commencer : rappel sur la notion de «base»

Définition 0.1 Soient F un sev de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est une **base** de F si

① Tous les vecteurs $u_1,\dots u_p$ appartiennent à F.

② La famille $(u_1,\dots,u_p)$ est libre :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p,\qquad \lambda_1u_1+\dots+\lambda_pu_p=0_{\mathbb{R}^n}\qquad\Longleftrightarrow\qquad \forall i\in[\![1,p]\!],\ \ \lambda_i=0.$$

③ La famille $(u_1,\dots,u_p)$ est génératrice de F :

$$\forall u\in F,\qquad \exists(a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^p,\qquad u=a_1u_1+\cdots+a_pu_p$$

Proposition 0.2 Soient F un sev de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille $(u_1,\dots,u_p)$ est une **base** de F si et seulement si

① Tous les vecteurs $u_1,\dots u_p$ appartiennent à F :

$$\forall i\in\{1,\dots,p\},\qquad u_i\in F.$$

② Tout vecteur $u\in F$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\dots,u_p$:

$$\forall u\in F,\qquad \exists!(a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{R}^p,\qquad u=a_1u_1+\cdots+a_pu_p$$

1 Dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension** de F, et on le note $\dim(F)$.

? Méthode 1 - Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel

Pour déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$,

- On en détermine une base grâce aux Méthodes du Chapitre 20 «L'espace $\mathbb{R}^n$»
- On compte le nombre d'éléments que contient cette base, et cela donne la dimension.

Exemple 1.2 Montrer que la famille (u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, où

$$u_1=(1,1)\qquad\text{et}\qquad u_2=(0,2)$$

et en déduire la dimension de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que la famille (u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

① Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent bien à $\mathbb{R}^2$.

② Montrons que tout élément de $\mathbb{R}^2$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de u_1 et de u_2, c'est-à-dire,

$$\forall u=(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad u=a\cdot u_1+b\cdot u_2.$$

Soit $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$u=au_1+bu_2\qquad\Longleftrightarrow\qquad\left\{\begin{array}{ccccc}a&&&=&x\\a&+&b&=&y\end{array}\right.\qquad\Longleftrightarrow\qquad\left\{\begin{array}{ccc}a&=&x\\b&=&y-x\end{array}\right.$$

Donc, pour tout $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il existe un unique couple de scalaires $(a,b)=(x,y-x)$ tel que

$$u=a\cdot u_1+b\cdot u_2$$

Donc, la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Or, cette base possède deux vecteurs, donc,

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Exemple 1.3 Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$F = \mathrm{Vect}((1,0),(1,-1),(2,2))$$

- **Première étape : On détermine une famille génératrice** de F. Par construction, la famille

  $$((1,0),(1,-1),(2,2))$$

  est une famille génératrice de F.

- **Deuxième étape : On extrait une famille libre de la famille génératrice** Sauf que cette famille n'est pas libre car on peut exhiber la combinaison linéaire suivante :

  $$(2,2) = 4 \cdot (1,0) + (-2) \cdot (1,-1)$$

  et donc en particulier,

  $$F = \mathrm{Vect}((1,0),(1,-1),(2,2)) = \mathrm{Vect}((1,0),(1,-1))$$

  et la famille

  $$((1,0),(1,-1))$$

  est toujours une famille génératrice de F. De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille est libre. C'est donc une base de F.

- **Troisième étape : On en déduit la dimension** de F. La famille $((1,0),(1,-1))$ est une base de F et elle possède deux éléments. Le sous-espace vectoriel F est donc de dimension 2 :

  $$\dim(F) = 2$$

Exemple 1.4 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Ensemble ambiant	Sev	Dimension
$\mathbb{R}^2$	$\mathrm{Vect}((1,1))$	1
$\mathbb{R}^2$	$\mathrm{Vect}((0,0))$	0
$\mathbb{R}^3$	$\mathrm{Vect}((1,-1,2))$	1
$\mathbb{R}^2$	$\mathrm{Vect}((1,1),(2,2))$	1
$\mathbb{R}^2$	$\mathrm{Vect}((1,1),(-1,1))$	2
$\mathbb{R}^3$	$\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(1,1,0))$	2

Exemple 1.5 Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$. Montrer que F est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Déterminons la dimension du sev $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$.

- **Première étape : On détermine une famille génératrice** de F grâce à la méthode du Chapitre 20. L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec trois inconnues et une équation. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad x+y+z=0$$

On a une équation pour trois inconnues : on choisit une inconnue - par exemple x - que l'on exprime en fonction des deux inconnues restantes - ici y et z.

$$u \in F \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = -y-z$$

Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad u = (-y-z, y, z) \\ &\Longleftrightarrow \quad u = y(-1,1,0) + z(-1,0,1) \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in \operatorname{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1)) \end{aligned}$$

Donc,

$$F = \operatorname{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))$$

Donc, la famille

$$(u_1,u_2) = ((-1,1,0),(-1,0,1))$$

est génératrice de F.

- **Deuxième étape : On extrait une famille libre de la famille génératrice** grâce à la Méthode du Chapitre 20. Montrons que la famille $((-1,1,0),(-1,0,1))$ est libre.
  - *Première méthode : via la colinéarité* (car la famille ne contient que deux vecteurs). On peut remarquer que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car il n'existe pas de scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{car sinon} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -1 & = & -\lambda \\ 0 & = & \lambda \\ 1 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{absurde...}$$

  Donc la famille est libre.
  - *Deuxième méthode : via la définition*. Soient $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} & \lambda_1(-1,1,0) + \lambda_2(-1,0,1) = (0,0,0) \\ \text{donc} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -\lambda_1 & - & \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

  Donc, la famille (u_1,u_2) est une famille libre.

- **Troisième étape : On en déduit la dimension** de F. Finalement, la famille (u_1,u_2) est une base de F. Ainsi, F est de dimension finie et

$$\dim(F) = \operatorname{card}(u_1,u_2) = 2$$

Exemple 1.6 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Ambiant	Sev	d° de liberté & contraintes	Dim.
$\mathbb{R}^3$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$	d°liberté=3 & contraintes=1	2
$\mathbb{R}^2$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=-y\}$	d°liberté=2 & contraintes=1	1
$\mathbb{R}^4$	$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z=0 \text{ et } 2x-y+t=0\}$	d°liberté=4 & contraintes=2	2
$\mathbb{R}^3$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \text{ et } -x-y-z=0\}$	d°liberté=3 & contraintes=1	2

Exemple 1.7 Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$F = \{(a+b,a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

- **Première étape : On détermine une famille génératrice** de F. L'ensemble est défini de manière paramétrique avec deux paramètres. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} u \in F \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = (a+b,a,b) \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ u = a\cdot(1,1,0) + b\cdot(1,0,1) \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1)) \end{aligned}$$

  Ainsi,

$$F = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$$

  et la famille

$$((1,1,0),(1,0,1))$$

  est génératrice de F.

- **Deuxième étape : On extrait une famille libre de la famille génératrice**. Les deux vecteurs $(1,1,0)$ et $(1,0,1)$ ne sont pas colinéaires donc la famille $((1,1,0),(1,0,1))$ est libre. Comme c'est une famille génératrice de F, c'est donc une base de F.

- **Troisième étape : On en déduit la dimension** de F. La famille $((1,1,0),(1,0,1))$ est une base de F, elle contient deux vecteurs, donc

$$\dim(F) = 2.$$

Exemple 1.8 Déterminer la dimension des sous-espaces vectoriels suivants. *On ne demande pas ici de justifier (mais il faut savoir le faire...).*

Ambiant	Sev	Nbre de paramètres	Dim.
$\mathbb{R}^2$	$\{(t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$	paramètres=1	1
$\mathbb{R}^2$	$\{(t,v) \mid t,v \in \mathbb{R}\}$	paramètres=2	2
$\mathbb{R}^3$	$\{(a+b,a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$	paramètres=2	2
$\mathbb{R}^3$	$\{(a+b,a+b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$	paramètres=1	1

2 La base canonique de $\mathbb{R}^n$

Proposition 2.1 La famille $(e_1,\dots,e_n)$ définie par

$$e_1 = (1,0,\dots,0),\ \ e_2 = (0,1,0,\dots,0),\ \ \dots\ ,e_n = (0,\dots,0,1)$$

est une base de $\mathbb{R}^n$ (appelée base canonique). Ainsi, l'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension n :

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

Exemple 2.2 Pour chacun des espaces $\mathbb{R}^n$ ci-dessous, exhiber la base canonique associée, et la décomposition des vecteurs donnés dans la base canonique.

Ambiant	Base canonique	Une décomposition
$\mathbb{R}^2$	$((1,0),(0,1))$	$(2,3) = 2\cdot(1,0)+3\cdot(0,1)$
$\mathbb{R}^2$	$((1,0),(0,1))$	$(-1,5) = -1\cdot(1,0)+5\cdot(0,1)$
$\mathbb{R}^2$	$((1,0),(0,1))$	$(x,y) = x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)$
$\mathbb{R}^3$	$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$	$(x,y,z) = x\cdot(1,0,0)+y\cdot(0,1,0)+z\cdot(0,0,1)$

Démonstration. Déjà, tous les vecteurs $e_1,\dots,e_n$ sont dans $\mathbb{R}^n$. Montrons que tout élément de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique comme une combinaison linéaire de $(e_1,\dots,e_n)$, autrement dit que,

$$\forall u = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \exists!(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u = a_1e_1+\dots+a_ne_n$$

Soit $u = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$u = a_1e_1+\dots+a_ne_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lll} a_1 & = & x_1 \\ \vdots & & \\ a_n & = & x_n \end{array}\right.$$

Donc, pour tout $u = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique n-uplets de scalaires $(a_1,\dots,a_n) = (x_1,\dots,x_n)$ tel que

$$u = a_1e_1+\dots+a_ne_n$$

Donc, la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Or, cette base contient n vecteurs, donc

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

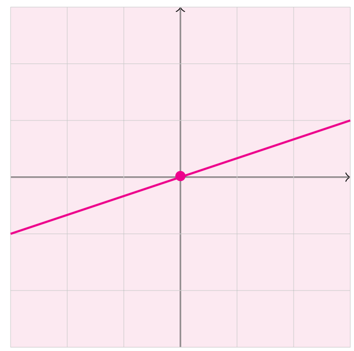
■

3 Dimension et le principe de double inclusion

Proposition 3.1 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors
$$0 \leqslant \dim(F) \leqslant n.$$
De plus,
- $\dim(F) = 0$ si et seulement si $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
- $\dim(F) = n$ si et seulement si $F = \mathbb{R}^n$.

Exemple 3.2 Caractérisons les sous-espaces vectoriels possibles de $\mathbb{R}^2$.

Dimension possible	Sous-espace vectoriel
0	$F = \{(0,0)\}$
1	$F = \mathrm{Vect}(u)$ (droite vectorielle)
2	$F = \mathbb{R}^2$



Proposition 3.3 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On suppose que
① $F \subset G$
② $\dim(F) = \dim(G)$
Alors, $F = G$.

Méthode 2 - Montrer l'égalité de deux sev

Pour montrer l'égalité de deux sev F et G, on peut
- Soit raisonner par équivalence, c'est-à-dire montrer que $x \in F$ si et seulement si $x \in G$.
- Soit procéder par double inclusion, c'est-à-dire montrer que $F \subset G$ et $G \subset F$
- Soit montrer que
  1. une des deux inclusions est vraie (on choisit l'inclusion «la plus facile» à démontrer)
  2. les deux espaces ont la même dimension

Exemple 3.4 Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,1,-2),(1,-3,2))$. Montrer que $F = G$.

Montrons que $F = G$.
1. Montrons que F et G sont de même dimension.
   - L'espace F est de dimension 2 (cf Exemple 1.5).
   - La famille $((1,1,-2),(1,-3,2))$ génère G par construction et de plus, c'est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc la famille $((1,1,-2),(1,-3,2))$ est une base de G. On en déduit que G est de dimension 2.
2. Montrons que $G \subset F$. Par stabilité par combinaison linéaire, il suffit de montrer que
$$(1,1,-2) \in F \qquad \text{et} \qquad (1,-3,2) \in F.$$
Or
$$1+1+(-2)=0 \qquad \text{donc} \qquad (1,1,-2) \in F$$
et
$$1+(-3)+(2)=0 \qquad \text{donc} \qquad (1,-3,2) \in F$$
Donc $G \subset F$.

Comme $G \subset F$ et que les deux ensembles sont de même dimension, on en déduit que $G = F$.

3.1 Familles libres, génératrices, bases et dimension

Proposition 3.5 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et que $\mathcal{L}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors
$$\text{card}(\mathcal{L}) \leqslant \dim(E) \leqslant \text{card}(\mathcal{G}).$$
2. Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E et que $\text{card}(\mathcal{F}) > \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ est liée.
3. Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E et que $\text{card}(\mathcal{F}) < \dim(E)$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de E.

Exemple 3.6

Famille	Espace ambiant	Libre	Génére l'esp. ambiant
$\mathcal{F} = ((18,-63),(5,-6),(17,-48))$	$\mathbb{R}^2$	Non	On ne sait pas
$\mathcal{F} = ((1,2,3),(7,2,4))$	$\mathbb{R}^3$	On ne sait pas	Non
$\mathcal{F} = ((1,2),(3,4),(5,6))$	$\mathbb{R}^3$	On ne sait pas	On ne sait pas

Proposition 3.7 Soient F un sev de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de F.

- Si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est libre et que $\text{card}(u_1,\dots,u_p) = \dim(F)$, alors la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est une base de F.
- Si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ génère F et que $\text{card}(u_1,\dots,u_p) = \dim(F)$, alors la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est une base de F.

?

Méthode 3 - Montrer qu'une famille est une base de F connaissant sa dimension

Pour montrer qu'une famille est une base de F, connaissant la dimension de F, on peut

① Montrer que tous les vecteurs de la famille sont dans l'espace.
② Montrer que la famille est libre (ou génératrice, mais c'est souvent plus simple de montrer qu'elle est libre).
③ Montrer que la famille possède autant d'éléments que la dimension de l'espace.

Exemple 3.8 Soient $u_1 = (1,2)$ et $u_2 = (1,-3)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

① Les vecteurs u_1 et u_2 appartiennent bien à $\mathbb{R}^2$.
② Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

- *Première méthode : via la colinéarité* (car la famille ne contient que deux vecteurs). On peut remarquer que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car il n'existe pas de scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{car sinon} \quad \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & \lambda \\ 2 & = & -3\lambda \end{array}\right. \quad \text{absurde...}$$
Donc la famille est libre.
- *Deuxième méthode : via la définition. Soient* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$. *Montrons que* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On a

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ \text{donc} & \lambda_1(1,2) + \lambda_2(1,-3) = (0,0) \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \\ & - & 5\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} & \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{array}$$

Donc la famille (u_1, u_2) est libre.

③ On sait que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et que $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = 2$ donc $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^2)$.

4 Rang d'une famille

Définition 4.1 Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **rang** de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ et on note $\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille $(u_1, \ldots, u_p)$, c'est-à-dire,

$$\mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim(\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)).$$

? **Méthode 4 - Déterminer le rang d'une famille de vecteurs**

Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on détermine la dimension de l'espace engendré par cette famille.

Exemple 4.2

Famille	Ensemble associé F	Base de F	Rang
$\mathcal{F} = ((1,0),(1,1),(3,-2))$	$F = \mathrm{Vect}((1,0),(1,1),(3,-2))$	$((1,0),(1,1))$	$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$
$\mathcal{F} = ((2,1,0),(-1,0,1))$	$F = \mathrm{Vect}((2,1,0),(-1,0,1))$	$((2,1,0),(-1,0,1))$	$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$
$\mathcal{F} = ((1,1,-2),(1,-3,2))$	$F = \mathrm{Vect}((1,1,-2),(1,-3,2))$	$((1,1,-2),(1,-3,2))$	$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 2$