TD 24 – Dimension d'un s.e.v

1 Savoir déterminer une Dimension

Exercice 1 – Dimension d'un Vect | Méthode 1, *Exemples 1.3 & 1.4.* Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

1. $F = \text{Vect}((1,1))$
2. $F = \text{Vect}((1,1),(-1,-1))$
3. $F = \text{Vect}(((1,2),(-1,2))$
4. $F = \text{Vect}((0,0))$
5. $F = \text{Vect}(((1,0,1),(0,1,0),(2,2,2))$
6. $F = \text{Vect}((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$

Exercice 2 – Dimension d'un ensemble définie de manière conditionnelle | Méthode 1, *Exemples 1.5 & 1.6.* Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\right\}$
2. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y+4z=0\right\}$
3. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=0 \text{ et } z+t=0\right\}$

Exercice 3 – Dimension d'un ensemble définie de paramétrique | Méthode 1, *Exemples 1.7 & 1.8.* Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

1. $F = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
2. $F = \{(3a-5b,2a,a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $F = \{(a+b,a+b,a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 4 – Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\right\}$ et $G = \text{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension de F et de G.
3. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

Exercice 5 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

On pourra commencer par étudier les cas $n=2$ et $n=3$.

2 Utilisation de la notion de Dimension

Exercice 6 – Méthode 2, *Exemple 3.4.* On considère les ensembles

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-4t+2z = 0\right\}$$
$$F = \text{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$$

1. Déterminer la dimension de E.
2. Déterminer la dimension de F.
3. Montrer que $E = F$.

Exercice 7 – Méthode 3, *Exemple 3.8.*

1. Montrer que la famille $((1,2),(3,4))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (en étant le plus *efficace* possible).
2. Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en étant le plus *efficace* possible).

Exercice 8 – Déterminer à quelle·s condition·s sur le réel a, la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$((1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a))$$

Exercice 9 – On considère l'ensemble

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+2z-2t=0\}.$$

On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de F.
2. En déduire la dimension de F.
3. On considère la famille $\mathcal{B} = ((0,-4,1,3),(3,-1,-2,0))$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.
   (b) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de F.

3 Rang d'une famille

Exercice 10 – Méthode 4, *Exemple 4.2* . Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $e_1 = (0,-1,2)$, $e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$. Déterminer $\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3)$.

4 Vers la deuxième année

Exercice 11 – On considère la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 - A$.
2. Déterminer les racines du polynômes $x \mapsto x^3 - 3x^2 - x + 3$. On les notera r_1, r_2 et r_3.
3. On note, pour tout $i = 1,2,3$,
   $$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = r_i X\}$$
   Montrer que, pour tout $i = 1,2,3$, $E_i = \mathrm{Vect}(u_i)$ où u_i est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.
4. En déduire pour tout $i = 1,2,3$, la dimension de E_i.
5. On note P la matrice 3×3 dont les colonnes sont constitués des trois vecteurs u_1, u_2 et u_3. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
6. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est la matrice diagonale donnée par
   $$D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}$$
7. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
8. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression matricielle de A^n.