TD 24 – Dim. d'un s.e.v (correction)

1 Savoir déterminer une Dimension

Exercice 1 – Dimension d'un Vect | Méthode 1, *Exemples 1.3 & 1.4.* Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

1. $\dim(\mathrm{Vect}((1,1))) = 1$
2. $\dim(\mathrm{Vect}((1,1),(-1,-1))) = 1$
3. $\dim(\mathrm{Vect}(((1,2),(-1,2))) = 2$
4. $\dim(\mathrm{Vect}((0,0))) = 0$
5. $\dim(\mathrm{Vect}(((1,0,1),(0,1,0),(2,2,2))) = 2$
6. $\dim(\mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))) = 3$

Exercice 2 – Dimension d'un ensemble définie de manière conditionnelle | Méthode 1, *Exemples 1.5 & 1.6.* Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

1. $\dim\left(\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\right\}\right)=2$
2. $\dim\left(\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+5y+4z=0\right\}\right)=2$
3. $\dim\left(\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=y+z=0 \text{ et } z+t=0\right\}\right)=2$

Exercice 3 – Dimension d'un ensemble définie de paramétrique | Méthode 1, *Exemples 1.7 & 1.8*.
Dans chaque cas, déterminer une base de F et en déduire sa dimension.

1. $\dim(\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}) = 1$
2. $\dim(\{(3a-5b, 2a, a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}) = 2$
3. $\dim(\{(a+b, a+b, a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}) = 1$

Exercice 4 – Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((0,1,1),(-1,1,-1))$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (...)

2. Déterminer la dimension de F et de G.

   $\dim(F) = \dim(G) = 2$

3. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

   Soit $u \in F \cap G$. Alors, comme $u \in G$, il existe deux scalaires a et b tels que

   $$u = a \cdot (0,1,1) + b \cdot (-1,1,-1) = (-b, a+b, a-b)$$

   De plus, comme $u \in F$, les deux scalaires a et b doivent nécessairement vérifier

   $$-b - 2(a+b) + a - b = 0$$

   autrement dit,
   $$a = -4b.$$

   Donc nécessairement, le vecteur u est de la forme,

   $$u = (-b, -3b, -5b)$$

   Ainsi, on a montré que
   $$F \cap G \subset \{(-b,-3b,-5b) \mid b \in \mathbb{R}\}.$$

   On montre que l'autre inclusion est vraie et donc que, par double inclusion,

   $$F \cap G = \{(-b,-3b,-5b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

   Grâce à cette égalité, on peut montrer ensuite que

   $$\dim(F \cap G) = 1$$

Exercice 5 – Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ suivant :

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}.$$

On pourra commencer par étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$.

$\dim(F) = n - 1$

2 Utilisation de la notion de Dimension

Exercice 6 – Méthode 2, *Exemple 3.4*. On considère les ensembles

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z = x-4t+2z = 0\right\}$$
$$F = \mathrm{Vect}\big((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2)\big)$$

1. Déterminer la dimension de E.

   On peut montrer que la famille $((-2,1,1,0),(4,-4,0,1))$ est une base de E. Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de $\boxed{\text{dimension } 2.}$

2. Déterminer la dimension de F.

   On peut montrer que la famille $((2,1,-3,-1),(2,-5,3,2))$ est une base de F. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de $\boxed{\text{dimension } 2.}$

3. Montrer que $E = F$.

   Montrons que $E = F$.

   (a) Montrons que $F \subset E$. On remarque que

   $$\begin{array}{lll} (2,1,-3,-1) \in E & \text{car} & 2+1-3 = 2-4(-1)+2(-3) = 0 \\ (2,-5,3,2) \in E & \text{car} & 2-5+3 = 2-4\cdot 2+2\cdot 3 = 0 \end{array}$$

   Ainsi, par stabilité par combinaison linéaire, $F \subset E$.

   (b) Montrons que les deux espaces sont de même dimension.
   - L'espace E est de dimension 2 (cf Question 1).
   - L'espace F est de dimension 2 aussi (cf Question 2).

   Donc $\boxed{E = F.}$

Exercice 7 – Méthode 3, *Exemple 3.8.*

1. Montrer que la famille $((1,2),(3,4))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (en étant le plus *efficace* possible).
2. Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en étant le plus *efficace* possible).

1. ...
2. Notons $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,0)$ et $u_3 = (1,2,3)$. Montrons que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

   ① Les vecteurs u_1, u_2 et u_3 appartiennent bien à $\mathbb{R}^3$.

   ② Montrons que la famille (u_1,u_2,u_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 0$. On a

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\text{donc} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{donc} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\text{donc} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

   Donc la famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

   ③ On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et que $\text{card}((u_1,u_2,u_3)) = 3$ donc $\text{card}((u_1,u_2,u_3)) = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Donc $\boxed{\text{la famille } ((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

Exercice 8 – Déterminer à quelle·s condition·s sur le réel a, la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$((1,-1,0),(2,-1,2),(1,0,a))$$

Exercice 9 – On considère l'ensemble

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y+2z-2t = 0\}.$$

On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de F.

   L'ensemble est défini de manière conditionnelle avec quatre inconnues et deux équations. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

   $$u \in F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

   On a deux équations pour quatre inconnues : on choisit deux inconnues principales - par exemple x et y - que l'on exprime en fonction de deux inconnues restantes - z et t, grâce à la **méthode du pivot de Gauss**.

   $$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y + z - 3t = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}z - \frac{3}{2}t \end{cases} \end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient que

   $$\begin{aligned} u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad u = (-\tfrac{3}{2}z + \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}z - \tfrac{3}{2}t, z, t) \\ &\Leftrightarrow \quad u = z(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0) + t(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \mathrm{Vect}((-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0), (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, 0, 1)) \end{aligned}$$

   Ainsi,

   $$F = \mathrm{Vect}((-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 1)) = \mathrm{Vect}((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$$

   - On obtient donc directement que la famille $((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$ est une famille génératrice de F.
   - De plus, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car s'il existe un réel λ tel que

     $$(-3,1,2,0) = \lambda(1,-3,0,2)$$

     alors, en regardant la dernière coordonnée, on obtient $\lambda = 0$ ce qui ne va pas avec les autres coordoonées. Donc la famille $((-1,0,1,0),(0,-1,0,1))$ est libre.

   Finalement, $\boxed{\text{la famille } ((-3,1,2,0),(1,-3,0,2)) \text{ est une base de } F.}$

2. En déduire la dimension de F.

   D'après la Question 1, la famille $((-3,1,2,0),(1,-3,0,2))$ est une base de F. Or cette base contient deux vecteurs. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de $\boxed{\text{dimension 2.}}$

3. On considère la famille $\mathcal{B} = ((0,-4,1,3),(3,-1,-2,0))$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

   Les deux vecteurs $(0,-4,1,3)$ et $(3,-1,-2,0)$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel λ tel que

   $$(0,-4,1,3) = \lambda(3,-1,-2,0)$$

   alors en regardant la première coordonnée, on obtient $\lambda = 0$ alors qu'en regardant la deuxième, on obtient $\lambda = 4$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} \text{ est libre.}}$

   (b) En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de F.

- Tout d'abord, le vecteur $(0,-4,1,3)$ est bien **dans** F car

$$0-4+1+3=0 \quad \text{et} \quad 0-(-4)+2\times 1-2\times 3=0$$

  De même, le vecteur $(3,-1,-2,0)$ est bien dans F.
- De plus, d'après la Question 3(a), la famille $\mathcal{B}$ est **libre**.
- Enfin, la famille contient deux vecteurs, c'est-à-dire **autant que la dimension** de F d'après la Question 2.

Donc, la famille $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F.}$

3 Rang d'une famille

Exercice 10 – Méthode 4, *Exemple 4.2* . Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $e_1 = (0,-1,2)$, $e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$. Déterminer $\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3)$.

Déterminons la dimension de $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$.

- Par construction, la famille (e_1,e_2,e_3) engendre F. Cependant, ce n'est pas une famille libre car on peut par exemple remarquer que
$$e_2 = e_1 + e_3.$$
Ceci montre également que
$$F = \mathrm{Vect}(e_1,e_3)$$
et donc que la famille (e_1,e_3) engendre également F. Montrons que la famille (e_1,e_3) est libre. Soient $(\lambda_1,\lambda_3) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. On a
$$\begin{aligned} & \lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \text{donc} \quad & \left\{\begin{array}{rcrcl} & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ \text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$
Donc, la famille (e_1,e_3) est une famille libre.

- Finalement, la famille (e_1,e_3) est une base de F et donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Et donc
$$\mathrm{rg}(e_1,e_2,e_3) = \dim(F) = 2,$$
c'est-à-dire $\boxed{\text{la famille } (e_1,e_2,e_3) \text{ est de rang } 2.}$

4 Vers la deuxième année

Exercice 11 – On considère la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 - A$.

   On peut calculer que
   $$A^3 - 3A^2 - A = -3I_3$$

2. Déterminer les racines du polynômes $x \mapsto x^3 - 3x^2 - x + 3$. On les notera r_1, r_2 et r_3.

   Les racines du polynômes $x \mapsto x^3 - 3x^2 - x + 3$ sont
   $$r_1 = -1 \qquad r_2 = 1 \qquad r_3 = 3$$

3. On note, pour tout $i = 1, 2, 3$,
   $$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = r_i X\}$$
   Montrer que, pour tout $i = 1, 2, 3$, $E_i = \text{Vect}(u_i)$ où u_i est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

   On montre que
   $$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. En déduire pour tout $i = 1, 2, 3$, la dimension de E_i.

   Pour tout $i = 1, 2, 3$, la dimension de E_i est 1.

5. On note P la matrice 3×3 dont les colonnes sont constitués des trois vecteurs u_1, u_2 et u_3. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.

   On a
   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Vérifier que $P^{-1}AP = D$ où D est la matrice diagonale donnée par
   $$D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}$$

   (...)

7. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (...)

8. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression matricielle de A^n.

   (...)