DS 5

Correction

Exercice 1 – Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les ensembles

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0 \quad \text{et} \quad 4x+y-2z=0\}$$
$$G = \{(a+2b, a-b, 2a+b),\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Dans cette question, on s'intéresse à l'ensemble F.
   (a) Sans écrire F comme un sous-espace vectoriel engendré, démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   - $F \subset \mathbb{R}^3$
   - $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ car $0-2\times 0+0=0$ et $4\times 0+0-2\times 0=0$.
   - Soient $u=(x,y,z) \in F$, $v=(x',y',z') \in F$ et $a,b \in \mathbb{R}$.

   $$au+bv = (\underbrace{ax+bx'}_{X}, \underbrace{ay+by'}_{Y}, \underbrace{az+bz'}_{Z})$$

   $$\begin{aligned} X-2Y+Z &= ax+bx'-2ay-2by'+az+bz' \\ &= a(\underbrace{x-2y+z}_{=0 \text{ car } u\in F}) + b(\underbrace{x'-2y'+z'}_{=0 \text{ car } v\in F}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} 4X+Y-2Z &= 4ax+4bx'+ay+by'-2az-2bz' \\ &= a(\underbrace{4x+y-2z}_{=0 \text{ car } u\in F}) + b(\underbrace{4x'+y'-2z'}_{=0 \text{ car } v\in F}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $au+bv \in F$.

   Ainsi, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

   (b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. À l'aide du pivot de Gauss, montrer que les deux systèmes suivants sont équivalents,

   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{3}z \\ y & = & \frac{2}{3}z \end{array}\right.$$

   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. À l'aide du **pivot de Gauss**, on obtient,

   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 9y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & & & = & \frac{2}{3}z \end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{3}z \\ y & = & \frac{2}{3}z \end{array}\right.$$

(c) Donner un vecteur qui appartient à F et un vecteur qui n'appartient pas à F.

Le vecteur $\boxed{(1,2,3) \in F}$ car

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & - & 2\times 2 & + & 3 & = & 0 \\ 4\times 1 & + & 2 & - & 2\times 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Le vecteur $\boxed{(1,1,1) \notin F}$ car

$$1-2\times 1+1 \neq 0$$

(d) Écrire une fonction `Python` qui prend en argument trois nombres réels x, y et z, qui renvoie le message "Le triplet appartient à F" si le triplet (x,y,z) appartient à l'ensemble F et qui renvoie le message "Le triplet n'appartient pas à F" dans le cas contraire.

```python
def appartenanceaF(x,y,z):
    if x-2*y +z == 0 and 4*x+y - 2*z == 0:
        return("Le triplet appartient à F")
    else :
        return("Le triplet n'appartient pas à F")
```

(e) Déterminer un vecteur $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$F = \mathrm{Vect}(u_1)$$

Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} u\in F \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 4x+y-2z=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{1}{3}z \\ y=\frac{2}{3}z \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad u=\left(\frac{1}{3}z, \frac{2}{3}z, z\right) \\ & \Leftrightarrow \quad u=z\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \\ & \Leftrightarrow \quad u\in \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)\right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{F=\mathrm{Vect}\left(\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 1\right)\right)=\mathrm{Vect}((1,2,3))}$$

(f) En déduire une famille génératrice de F.

D'après la question précédente,

$$F=\mathrm{Vect}((1,2,3))$$

Donc, $\boxed{\text{la famille } ((1,2,3)) \text{ est génératrice de } F.}$

(g) La famille (u_1) est-elle libre ?

$\boxed{\text{La famille } ((1,2,3))}$ contient un seul vecteur, qui est non nul, donc elle est $\boxed{\text{libre}}$.

(h) En déduire une base de F.

$\boxed{\text{La famille } ((1,2,3))}$ est libre et génératrice de F d'après les questions précédentes, c'est donc une $\boxed{\text{base}}$ de F.

2. Dans cette question, on s'intéresse à l'ensemble G.

(a) Donner un vecteur qui appartient à G.

Le vecteur $\boxed{(1,1,2) \text{ appartient à } G}$ car il existe $a = 1$ et $b = 0$ tels que

$$(1,1,2) = (a+2b, a-b, 2a+b).$$

(b) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} u \in G \quad &\iff \quad \exists a,b \in \mathbb{R},\ \ u = (a+2b, a-b, 2a+b) \\ &\iff \quad \exists a,b \in \mathbb{R},\ \ u = a\cdot(1,1,2) + b\cdot(2,-1,1) \\ &\iff \quad u \in \operatorname{Vect}(v_1, v_2) \end{aligned}$$

avec $v_1 = (1,1,2)$ et $v_2 = (2,-1,1)$. Donc,

$$G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$$

et ainsi, $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$

(c) Montrer que la famille (v_1, v_2) est une famille génératrice de G où

$$v_1 = (1,1,2) \qquad \text{et} \qquad v_2 = (2,-1,1)$$

D'après la question précédente, on sait que

$$G = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$$

Donc, $\boxed{\text{la famille } (v_1, v_2) \text{ est génératrice de } G.}$

(d) Montrer que la famille (v_1, v_2) est une famille libre (dans $\mathbb{R}^3$).

Montrons que la famille (v_1, v_2) est libre. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a\cdot v_1 + b\cdot v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Montrons que $a = b = 0$. Raisonnons par équivalence.

$$av_1 + bv_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} a+2b = 0 \\ a-b = 0 \\ 2a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3b = 0 \\ a = b \\ 3b = 0 \end{cases} \iff a = b = 0$$

donc $\boxed{(v_1, v_2) \text{ est libre.}}$

(e) En déduire une base de G.

D'après les questions précédentes, $\boxed{\text{la famille } (v_1, v_2)}$ est libre et est une famille génératrice de G, c'est donc une $\boxed{\text{base}}$ de G.

3. A-t-on $F = G$?

Le vecteur $(1,1,2)$ appartient à G (cf question 2(a)) mais n'appartient pas à F car

$$4\times 1 + 1 - 2\times 2 \neq 0.$$

Donc $\boxed{\text{les deux ensembles } F \text{ et } G \text{ ne peuvent pas être égaux.}}$

Exercice 2 – Étude d'une fonction. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `Python` qui, étant donné un nombre x, renvoie la valeur de $g(x)$.

```python
import numpy as np
def g(x):
    if x < 0:
        return 0
    else:
        return x*np.exp(-x)
```

2. Justifier que g est continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$.

   - Sur $]0,+\infty[$, la fonction g coïncide avec la fonction $x \mapsto x\exp(-x)$. Or, les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \exp(-x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc à fortiori sur $]0,+\infty[$. Donc, par produit, la fonction g est continue sur $]0,+\infty[$.
   - Sur $]-\infty,0[$, la fonction g coïncide avec la fonction $x \mapsto 0$, qui est continue sur $\mathbb{R}$ et donc à fortiori sur $]-\infty,0[$.

   Donc, la fonction $\boxed{g \text{ est continue sur }]0,+\infty[\text{ et sur }]-\infty,0[.}$

3. Montrer que g est continue en 0.

   Etudions la continuité en 0. On a

   $$g(0) = 0 \times e^0 = 0$$

   et

   $$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 = g(0)$$

   et

   $$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} xe^{-x} = 0 = g(0)$$

   On a donc

   $$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$$

   donc $\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$

4. Justifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$. Donner la dérivée de g sur chacun de ces intervalles.

   On raisonne comme à la question 2 pour montrer que $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$ et $\boxed{\text{sur }]-\infty,0[}$. De plus,

   $$\boxed{\forall x < 0,\ \ g'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0,\ \ g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}}$$

5. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

   Regardons le taux d'accroissement en 0 à droite et à gauche.

   - Le taux d'accroissement en 0 à droite est donné par

     $$\forall x > 0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{xe^{-x}-0}{x-0} = e^{-x}$$

     Donc,

     $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = e^{-0} = 1$$

     Donc, la fonction g est dérivable en 0 à droite et $f_d'(0) = 1$.

- Le taux d'accroissement en 0 à gauche est donné par

$$\forall x < 0, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{0-0}{x-0} = 0$$

Donc,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$

Donc, la fonction g est dérivable en 0 à gauche et $f_g'(0) = 0$.

La fonction g est dérivable à gauche et à droite de 0 mais les dérivées à gauche et à droite en 0 sont différentes : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est donc pas dérivable en } 0.}$

6. Donner la limite de la fonction g en $+\infty$.

Par **croissances comparées**, on obtient,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.}$$

7. Dresser le tableau de variation de g sur $[0, +\infty[$.

On a vu à la question 4 que la fonction g était dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, \qquad g'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2.

L'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 2 est donnée par

$$y = g'(2)(x-2) + g(2)$$

soit, après calculs,

$$\boxed{y = -\mathrm{e}^{-2}x + 4\mathrm{e}^{-2}}$$

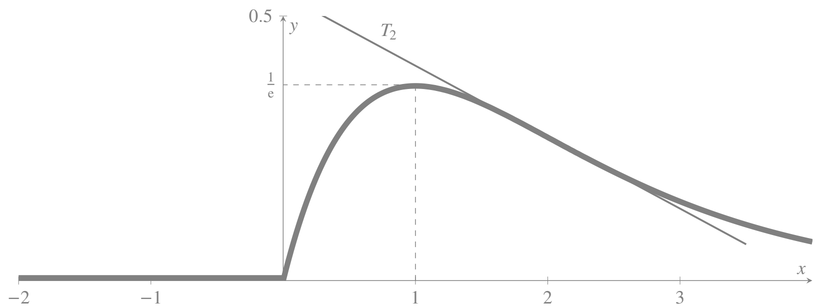
9. Recopier et compléter le programme suivant qui permet de tracer à l'aide de `Python` la courbe de la fonction g sur $[0, 10]$.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def g(x) :
    return ( x*np.exp(-x))

abscisses = np.linspace( 0 , 10 , 100 )
ordonnees =  g(abscisses)
plt.plot(abscisses,ordonnees)
plt.show()
```

10. Tracer l'allure de la courbe de g sur $\mathbb{R}$.



11. La fonction g admet-elle un maximum global ? un minimum global ?

La fonction g admet un $\boxed{\text{maximum qui vaut } 1/\mathrm{e}}$ atteint en $x = 1$. La fonction g admet un $\boxed{\text{minimum qui vaut } 0}$ atteint en n'importe quel point de $\mathbb{R}^-$.

12. (a) Montrer que la fonction g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

Montrons que la fonction g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

- La fonction g est bien définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- La fonction g est continue sur $[1, +\infty[$ (cf question 2).
- La fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ (cf question 7).

Donc, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction $\boxed{g \text{ est bijective de } [1, +\infty[\text{ vers}}$

$$\boxed{J = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]}$$

(b) En déduire que l'équation $g(x) = \frac{1}{3}$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$. *On admet que*

$$\frac{1}{\mathrm{e}} > \frac{1}{3}$$

D'après la question précédente, la fonction g est bijective de $[1, +\infty[$ vers $J = \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ et donc

$$\forall y \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right], \exists! x \in [1, +\infty[, y = g(x)$$

En particulier, pour $y = \frac{1}{3} \in \left]0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ (car $\frac{1}{3} < \frac{1}{\mathrm{e}}$), on obtient

$$\boxed{\exists! x \in [1, +\infty[, \frac{1}{3} = g(x)}$$

(c) La fonction g réalise-t-elle une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

L'élément 0 admet deux antécédents -1 et -2 (il admet même une infinité d'antécédents). La fonction g n'est donc pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{\text{pas bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$

13. Dans cette question, on s'intéresse à la série suivante

$$\sum_{k\geqslant 2} g(k)$$

On désigne par $(S_n)_{n\geqslant 2}$ sa suite des sommes partielles.

(a) Que vaut S_2 ? S_3 ?

Par définition,

$$\forall n \geqslant 2, \qquad S_n = \sum_{k=2}^{n} g(k)$$

Donc,

$$\boxed{S_2} = \sum_{k=2}^{2} g(k) = g(2) \boxed{= 2\mathrm{e}^{-2}}$$

De même,

$$\boxed{S_3} = \sum_{k=2}^{3} g(k) = g(2) + g(3) \boxed{= 2\mathrm{e}^{-2} + 3\mathrm{e}^{-3}}$$

(b) Écrire une fonction `Python` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de la somme partielle d'indice n, c'est-à-dire renvoie la valeur de S_n.

```python
def Somme(n):
    S = 0
    for k in range(2,n+1):
        S = S + g(k)
    return S
```

(c) Démontrer que la série $\sum_{k \geqslant 2} g(k)$ converge et déterminer sa somme.

Le terme général de la série est donné par,

$$\forall k \geqslant 2, \qquad g(k) = k\mathrm{e}^{-k} = k\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k} = \frac{1}{\mathrm{e}} \times k\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k-1}$$

On reconnaît (à une constante près) une série **géométrique dérivée d'ordre 1** qui $\boxed{\text{converge}}$ car

$$-1 < \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

De plus, sa somme vaut,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} g(k)} &= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k-1} - 1 \times \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{0}\right) \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{2}} - 1\right) \\
&\boxed{= \frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^{2}} - \frac{1}{\mathrm{e}}}
\end{aligned}$$

Exercice 3 – Séries numériques. Déterminer la nature des séries suivantes et, le cas échéant, déterminer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^k}{3^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k k!}$
3. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{3}{2^{k+1}}$
4. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$

1. Le terme général de la série est donné par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{5^k}{3^k} = \left(\frac{5}{3}\right)^k$$

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{5^k}{3^k}$ est donc une **série géométrique** de raison $\frac{5}{3} \notin]-1,1[$ donc elle $\boxed{\text{diverge.}}$

2. Le terme général de la série est donné par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{3^k k!} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^k}{k!}$$

La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^k k!}$ est une **série exponentielle** donc elle $\boxed{\text{converge}}$. Sa somme est

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k k!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}}$$

3. Le terme général de la série est donné par

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \frac{3}{2^{k+1}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Or, la série $\sum_{k\geqslant 2} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ est une **série géométrique** de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ donc elle converge. Par **combinaison linéaire,** $\sum_{k\geqslant 2} \frac{3}{2^{k+1}}$ $\boxed{\text{converge}}$ et sa somme vaut

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{2^{k+1}}} = \frac{3}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

4. Le terme général de la série est donné par,

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln(k) - \ln(k+1)$$

On reconnaît une **série télescopique**, on va donc étudier les sommes partielles. Soit $n \geqslant 2$. On a,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \ln(2) - \ln(n+1) \end{aligned}$$

par télescopage. Ainsi, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$, ce qui signifie que la série $\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right)$ $\boxed{\text{diverge}}$.

Exercice 4 – Variables aléatoires finies. Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le k-ième tirage. On note X_0 la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches présentes initialement dans l'urne. On a donc $X_0 = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pourra noter B_k l'évènement décrit par «La boule tirée au k-ième tirage est blanche.»

1. Dans cette question, on s'intéresse à X_1 la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le premier tirage.

   (a) Préciser $X_1(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X_1 et expliciter la loi de X_1.

   Au départ, l'urne contient une boule blanche.
   - Soit, au premier tirage, on tire une boule blanche. Alors, on la remet et on rajoute une boule noire dans l'urne. Après un tel premier tirage, il y a donc deux boules noires dans l'urne.
   - Soit, au premier tirage, on tire une boule noire. Alors, on la remet et on rajoute une boule blanche dans l'urne. Après un tel premier tirage, il y a toujours qu'une seule boule noire dans l'urne.

   Ainsi, à la fin du premier tirage, il y a donc soit une boule blanche, soit deux boules blanches dans l'urne. Ainsi,

   $$\boxed{X_1(\Omega) = \{1, 2\}.}$$

   Ces explications permettent aussi d'obtenir que

   $$[X_1 = 1] = B_1 \qquad \text{et} \qquad [X_1 = 2] = \overline{B_1}$$

   Ainsi, comme les issues du premier tirage sont équiprobables, on obtient,

   $$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{1}{2}}$$

   (b) Quelle loi usuelle reconnaît-on ?

   D'après la question précédente, la variable aléatoire X_1 suit une $\boxed{\text{loi uniforme sur } \{1, 2\}.}$

   (c) Donner l'espérance et la variance de X_1.

   Comme la variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur $\{1, 2\}$ (cf question précédente), on sait que X_1 admet une espérance et une variance données respectivement par,

   $$\boxed{\mathbb{E}(X_1) = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V(X_1) = \frac{2^2-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}}$$

2. Dans cette question, on s'intéresse à X_2 la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le deuxième tirage.

(a) Compléter l'arbre de probabilité suivant représentant les deux premiers tirages.

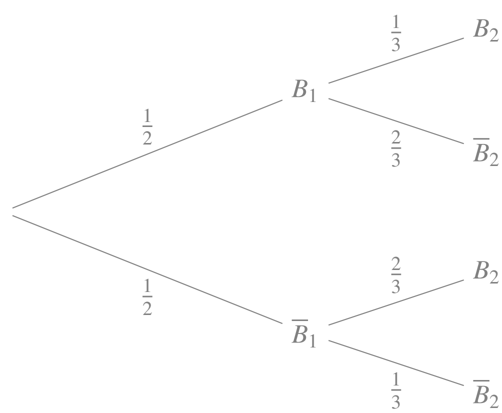
Si l'évènement B_1 est réalisé, à l'issue du premier tirage, il y a deux boules noires et une boule blanche dans l'urne. Comme les issues sont équiprobables, pour le deuxième tirage, on obtient alors les probabilités suivantes :

$$\boxed{\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B}_2) = \frac{2}{3}}$$

Si l'évènement $\overline{B}_1$ est réalisé, à l'issue du premier tirage, il y a une boule noire et deux boules blanches dans l'urne. Comme les issues sont équiprobables, pour le deuxième tirage, on obtient alors les probabilités suivantes :

$$\boxed{\mathbb{P}_{B_2}(B_2) = \frac{2}{3}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathbb{P}_{B_2}(\overline{B}_2) = \frac{1}{3}}$$

D'où l'arbre de probabilité suivant.



(b) Justifier soigneusement que $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

À l'issue du premier tirage, il y a deux cas.

- Premier cas : l'urne contient deux boules noires et une boule blanche dans l'urne. Dans ce cas,
  - Soit au deuxième tirage, on tire une boule noire et alors l'urne contient deux boules noires et deux boules blanches.
  - Soit au deuxième tirage, on tire une boule blanche et alors l'urne contient trois boules noires et une boule blanche.
- Deuxième cas : soit une boule noire et deux boules blanches.
  - Soit au deuxième tirage, on tire une boule noire et alors l'urne contient une boule noire et trois boules blanches.
  - Soit au deuxième tirage, on tire une boule blanche et alors l'urne contient deux boules noires et une boule blanche.

Au total, à l'issue du deuxième tirage, on peut avoir soit une, soit deux, soit trois boules blanches. Donc,

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}}$$

(c) Exprimer l'évènement $[X_2 = 1]$ en fonction des évènements B_1, B_2 et éventuellement leurs évènements contraires.

L'évènement $[X_2 = 1]$ correspond à avoir une seule boule blanche à la fin des deux tirages, donc à avoir tirer une boule blanche au premier et au deuxième tirage (comme cela les deux boules rajoutées sont noires et il n'y a qu'une seule boule blanche qui est celle de départ). Donc,

$$\boxed{[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2}$$

(d) En déduire que

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{6}$$

En utilisant la **formule des probabilités composées** (attention, les évènements ne sont pas indépendants) et l'égalité de la question précédente, on obtient que

$$\boxed{\mathbb{P}(X_2 = 1)} = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

(e) Justifier de même que,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{6}$$

En raisonnant de même, on obtient que,

$$[X_2 = 3] = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2$$

et donc, par **formule des probabilités composées**, on obtient que,

$$\boxed{\mathbb{P}([X_2 = 3])} = \mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = \mathbb{P}(\overline{B}_1) \times \mathbb{P}_{\overline{B}_1}(\overline{B}_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \boxed{= \frac{1}{6}}$$

Comme $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, on sait que

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 2]) + \mathbb{P}([X_2 = 3]) = 1$$

On en déduit donc que,

$$\boxed{\mathbb{P}([X_2 = 2])} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \boxed{= \frac{2}{3}}$$

(f) Calculer l'espérance de X_2.

La variable aléatoire X_2 est finie donc elle admet une espérance qui est donnée par,

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{E}(X_2)} &= \sum_{k=1}^{3} k \cdot \mathbb{P}(X_2 = k) \\
&= 1 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 2) + 3 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 3) \\
&= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{6} \\
&\boxed{= 2}
\end{aligned}$$

(g) Calculer la variance de X_2.

Tout d'abord, par **théorème de transfert**, X_2^2 admet une espérance donnée par,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2^2) &= \sum_{k=1}^{3} k^2 \cdot \mathbb{P}(X_2 = k) \\
&= 1^2 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 2) + 3^2 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 3) \\
&= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{2}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Puis, par **théorème de transfert**, X admet une variance donnée par,

$$\boxed{V(X)} = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \frac{13}{3} - 2^2 \boxed{= \frac{1}{3}}$$

3. On considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question, on s'intéresse à X_k et X_{k+1} les variables aléatoires correspondant respectivement au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le k-ième tirage et après le $k+1$-ième tirage.
   (a) Justifier qu'il y a exactement $k+2$ boules dans l'urne après le k-ième tirage et que l'ensemble des valeurs que peut prendre X_k est $X_k(\Omega) = \{1, \ldots, k+1\}$.

      Initialement, l'urne contient deux boules (une blanche et une noire). À chaque tirage, on ne rajoute qu'une boule dans l'urne (car la boule tirée est remise, et on en ajoute une de couleur opposée). Donc, après k tirages, on a rajouté k boules dans l'urne. Ainsi, avec les deux boules initialement contenues dans l'urne, on en déduit qu'après k tirages, $\boxed{\text{l'urne contient } k+2 \text{ boules.}}$

   (b) Soit $i \in X_{k+1}(\Omega)$.
      i. Si l'évènement $[X_k = i]$ est réalisé, préciser le nombre de boules blanches et noires dans l'urne après le k-ième tirage et en déduire

$$\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i).$$

      Si l'évènement $[X_k = i]$ est réalisé, alors après le k-ième tirage, l'urne contient i boules blanches, parmi $k+2$ boules au total (cf question 3(a)). De plus, $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i)$ correspond à la probabilité de tirer une boule blanche (ainsi, on rajoute une boule noire et le nombre de boules blanches reste constant). Comme toutes les issues sont **équiprobables**, on obtient que

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}}$$

      ii. Si l'évènement $[X_k = i-1]$ est réalisé, préciser le nombre de boules blanches et noires dans l'urne après le k-ième tirage et en déduire

$$\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i).$$

      Si l'évènement $[X_k = i-1]$ est réalisé, alors après le k-ième tirage, l'urne contient $i-1$ boules blanches, parmi $k+2$ boules au total (cf question 3(a)). De plus, $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i)$ correspond à la probabilité de tirer une boule noire (ainsi, on rajoute une boule blanche et le nombre de boules blanches augmente de 1). Comme toutes les issues sont **équiprobables**, on obtient que

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i)} = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} \boxed{= \frac{3+k-i}{k+2}}$$

      iii. Si $j \in X_k(\Omega)$ avec $j \neq i-1$ et $j \neq i$, que dire de

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) \ ?$$

      Soit $j \in X_k(\Omega)$. Si l'évènement $[X_k = j]$ est réalisé, après le k-ième tirage, il y a j boules blanches et donc le nombre de boules blanches après le $k+1$-tirage ne peut être que j ou $j+1$. Ainsi, si $i \neq j$ et $i \neq j+1$ (c-à-d $i-1 \neq j$), l'évènement $[X_{k+1} = i]$ ne peut pas se réaliser et donc,

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0}$$

   (c) En déduire, à l'aide de la formule de probabilités totales que,

$$\forall i \in X_{k+1}(\Omega), \qquad \mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i-1)$$

Soit $i \in X_{k+1}(\Omega)$. La famille $([X_k = j])_{j=1,\dots,k+1}$ forme un système complet d'évènements. Ainsi, par la **formule des probabilités totales**, on en déduit que,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}([X_k = j]) \times \mathbb{P}_{[X_k = j]}(X_{k+1} = i)$$

Or, d'après la question 3(b)iii.,

$$\forall\, j \in X_k(\Omega), \quad j \neq i-1, \quad j \neq i, \qquad \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \mathbb{P}([X_k = i]) \times \mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) + \mathbb{P}([X_k = i-1]) \times \mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i)$$

Puis, en utilisant les résultats des questions 3(b)i et 3(b)ii, on obtient,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \tfrac{i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i) + \tfrac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}(X_k = i-1)}$$