DEVOIR MAISON 4

Exercice 1 – Bonus. Corriger votre copie du DS5.

Voir la correction du DS5 sur Cahier de Prépa.

Exercice 2 – Étude d'une suite grâce à l'inégalité des accroissements finis. On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par:

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[, \ g(x) = f(x) - x.$$

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$u_0 = 1 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = 2 - \frac{1}{2}\ln(u_n)$$

Partie 1 - Étude de g

1. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Par opérations sur les limites, on obtient directement que,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$$

2. Dresser le tableau des variations de g sur $]0,+\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par combinaison linéaire, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\forall x > 0, \qquad g'(x) = -\frac{1}{2x} - 1 < 0$$

On en déduit le tableau de variations suivant pour g.

x	0	$+\infty$
g	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3. Montrer que la fonction g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

- $]0,+\infty[$ est un intervalle;
- g est continue sur $]0,+\infty[$;
- g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ d'après la question précédente.

Ainsi, d'après le **théorème de la bijection**, la fonction $\boxed{g \text{ réalise une bijection de }]0,+\infty[\text{ vers}}$

$$\boxed{J} =]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)[=]-\infty,+\infty[\ \boxed{= \mathbb{R}}$$

4. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$, que l'on notera α.

D'après la question précédente, g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ donc,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists! x \in]0,+\infty[, \ y = g(x)$$

En particulier, pour $y = 0 \in \mathbb{R}$, on obtient,

$$\exists! x \in]0,+\infty[, \ 0 = g(x)$$

$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet donc une unique solution sur }]0,+\infty[}$, que l'on note α.

5. Que vaut $g(\alpha)$ par construction ?

Par construction, α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{g(\alpha) = 0}$$

6. Justifier que

$$g(\mathrm{e}) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(1)$$

On pourra admettre que $3 - 2\mathrm{e} < 0$.

On peut calculer que

$$g(1) = 1$$

et

$$g(\mathrm{e}) = \frac{3}{2} - \mathrm{e} = \frac{3 - 2\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$$

et par construction

$$g(\alpha) = 0$$

Comme $3 - 2\mathrm{e} < 0$, on en déduit que

$$\boxed{g(\mathrm{e}) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(1)}$$

7. En déduire que $\alpha \in [1, \mathrm{e}]$.

D'après la question précédente, on sait

$$g(\mathrm{e}) \leqslant g(\alpha) \leqslant g(1)$$

Or, la fonction g est décroissante sur $]0, +\infty[$ (cf question 2), donc

$$\mathrm{e} \geqslant \alpha \geqslant 1$$

c'est-à-dire $\boxed{\alpha \in [1, \mathrm{e}].}$

Partie 2 - Étude de f

8. Justifier que $f(\alpha) = \alpha$.

Par construction, $g(\alpha) = 0$ (cf Questions 4 et 5). Or, $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha$. Donc,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha}$$

9. Démontrer que

$$\forall x \in [1, \mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = -\frac{1}{2x}$$

Donc,

$$\forall x > 0, \qquad |f'(x)| = \frac{1}{2x}$$

Soit $x \in [1, \mathrm{e}]$. On a,

$$\begin{array}{lll} & x \geqslant 1 & \\ \text{donc} & 2x \geqslant 2 & \\ \text{donc} & \frac{1}{2x} \leqslant \frac{1}{2} & \text{car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ décroissante sur }]0, +\infty[\end{array}$$

Ainsi, on a montré que,

$$\boxed{\forall x \in [1, \mathrm{e}], \quad |f'(x)| \leqslant \tfrac{1}{2}.}$$

10. En déduire, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que,

$$\forall a,b \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$

On sait que
- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donc à fortiori sur $[1,\mathrm{e}]$.
- D'après la question précédente,

$$\exists k = \frac{1}{2} \text{ tel que } \forall x \in [1,\mathrm{e}], \ |f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc, par inégalité des accroissements finis, on obtient que,

$$\boxed{\forall a,b \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \tfrac{1}{2}|b-a|}$$

Partie 3 - Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

11. Démontrer par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq \mathrm{e}.$$

Démontrons par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{P}(n) \ \text{« } 1 \leq u_n \leq \mathrm{e} \text{ » est vraie}$$

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. D'après l'énoncé, $u_0 = 1 \in [1,\mathrm{e}]$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$$1 \leq u_n \leq \mathrm{e}$$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que

$$1 \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e}$$

Par hypothèse de récurrence, on sait que

	$1 \leq u_n \leq \mathrm{e}$	
donc	$0 \leq \ln(u_n) \leq 1$	car $x \mapsto \ln(x)$ croissante sur $]0,+\infty[$
donc	$0 \geq -\frac{1}{2}\ln(u_n) \geq -\frac{1}{2}$	
donc	$2 \geq 2-\frac{1}{2}\ln(u_n) \geq 2-\frac{1}{2}$	
donc	$\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$	
donc à fortiori	$1 \leq u_{n+1} \leq \mathrm{e}$	

Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion. D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq u_n \leq \mathrm{e}}$$

12. À l'aide de la question 10, en déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

D'après la question 10, on sait que

$$\forall a,b \in [1,\mathrm{e}], \qquad |f(b)-f(a)| \leqslant \frac{1}{2}|b-a|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $a = \alpha \in [1,\mathrm{e}]$ (cf Question 7) et $b = u_n \in [1,\mathrm{e}]$ (cf Question 11), on obtient,

$$|f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ par définition et $f(\alpha) = \alpha$ par construction (cf Question 8), on obtient

$$\boxed{|u_{n+1}-\alpha| \leq \tfrac{1}{2}|u_n-\alpha|.}$$

13. Démontrer par récurrence que:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{\mathrm{e}-1}{2^n}.$$

Montrons par **récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante est vraie
$$\mathcal{P}(n) : \text{« } |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^n} \text{ ».}$$

- *Initialisation.* Montrons que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$|u_0 - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^0} = \mathrm{e}-1$$
D'après l'énoncé, $u_0 = 1$ donc $|u_0 - \alpha| = \mathrm{e}-1$ (car $\mathrm{e} > 1$) Et donc, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^n}$$
On veut montrer que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^{n+1}}$$
On a
$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \alpha| && \text{d'après la question précédente} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{e}-1}{2^n} && \text{d'après l'H-R} \\ &\leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$
Donc la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par principe de récurrence, on a démontré que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \tfrac{\mathrm{e}-1}{2^n}}$$

14. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

D'après la question précédente,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2^n}$$
Or, par propriété sur les suites géométriques, on a
$$\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e}-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car} \qquad -1 < \frac{1}{2} < 1.$$
Donc, par théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha}$$

Partie 4 - Pyhton

15. Informatique.
    (a) Écrire un programme python qui calcule et renvoie la liste $L = [u_0, u_1, \ldots, u_{100}]$.

```python
import numpy as np
u = 1
L = [u]
for k in range(100):
    u = 2-1/2*np.log(u)
    L.append(u)
print(L)
```

Dans les deux questions qui suivent, nous cherchons à déterminer une valeur approchée de α. Deux méthodes sont proposées. *On suppose que numpy a déjà été chargé avec l'alias np.*

(b) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il détermine une valeur approchée de α à 10^{-3} près par la méthode de la dichotomie. On sait que $\alpha \in [1, e]$, donc on part de l'intervalle $[a,b] = [1,e]$.

```
# définition de la fonction g
def g(x):
    return 2-1/2*np.log(x)-x

# dichotomie
a = 1
b = np.e
while b-a > 10**(-3) :
    m = (a+b)/2
    if g(a)*g(m)<0 :
        (a,b) = (a,m)
    else:
        (a,b) = (m,b)
print(a)
```

(c) Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il détermine, à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la question 13, une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

```
n = 0
u = 1
while (np.e-1)/2**n > 10**(-3) :
    u = 2-1/2*np.log(u)
    n = n+1
print(u)
```