25 Variables aléatoires discrètes infinies

On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé : Ω est un **univers**, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des **évènements** et $\mathbb{P}$ est une **probabilité** sur l'univers Ω.

1 Loi d'une variable aléatoire

1.1 Notion de variable aléatoire

Définition 1.1 Une **variable aléatoire** est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$, qui à chaque issue, associe un nombre réel telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant \omega\} \in \mathcal{A}$$

c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant x]$ est un évènement. On note alors $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ l'ensemble des valeurs prises. On dit que cette variable aléatoire est **finie** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est fini et **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est infini (dénombrable).

Définition 1.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On définit les évènements suivants :
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X = k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $[X \leqslant k] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant k\}$.
- Pour tout $A \subset \Omega$, $[X \in A] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$.

Exemple 1.3 On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0,1[$ et on note X le **rang d'apparition du premier Pile**. On convient que X prend la valeur 0 si aucun Pile n'apparaît. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer".

Ensemble des valeurs prises par la v.a. X $\qquad X(\Omega) = \mathbb{N}$

Alors,

$$[X=0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{P}_k \qquad [X=1] = P_1$$

$$[X=2] = \overline{P}_1 \cap P_2 \qquad [X=3] = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap P_3$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

Exemple 1.4 On effectue une succession infinie de tirages avec remises dans une urne composée de deux boules noires et huit boules blanches. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées avant l'obtention de la première boule noire. On attribue à X la valeur -1 si aucun boule noire n'est tirée. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, B_n l'évènement «Obtenir une boule blanche lors du tirage n.»

Ensemble des valeurs prises par la v.a. X $\qquad X(\Omega) = \{-1\} \cup \mathbb{N}$

Alors,

$$[X=-1] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k \qquad [X=0] = \overline{B}_1$$

$$[X=1] = B_1 \cap \overline{B}_2 \qquad [X=2] = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3$$

$$[X=3] = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_3 \qquad \ldots$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 1.5 La **loi de X** est la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et de toutes les probabilités $\mathbb{P}([X=k])$ pour $k \in X(\Omega)$.

Exemple 1.6 On lance une infinité de fois une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est de $p \in]0,1[$. On note X le rang d'apparition du premier Pile. Déterminer la loi de X.

- **Étape 1 : Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Ici,

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

- **Étape 2 : Déterminer la loi de la variable aléatoire.** Ici, déterminer la loi de X revient à calculer $\mathbb{P}([X=k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On admet que $\mathbb{P}([X=0]) = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n l'évènement "Obtenir Pile au n-ième lancer", on a

$$\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}(\overline{P}_1 \cap \cdots \cap \overline{P}_{k-1} \cap P_k)$$

Or, les lancers sont indépendants, c'est-à-dire que les évènements $(\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{k-1}, P_k)$ sont **mutuellement indépendants**. Donc,

$$\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}(\overline{P}_1) \times \cdots \mathbb{P}(\overline{P}_{k-1}) \times \mathbb{P}(P_k)$$

Finalement, on obtient que

$$\mathbb{P}([X=k]) = (1-p)^{k-1} p$$

On remarque que $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}([X=k])$ converge (série géométrique avec $1-p \in]0,1[$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) = p \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = p \times \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

Connaissant la loi de X, on peut alors calculer les probabilités suivantes.

$$\mathbb{P}([X=4]) = (1-p)^3 p$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \in \{0,1\}]) &= P([X=0] \cup [X=1]) \\
&= P([X=0]) + P([X=1]) && \text{car les évènements sont disjoints} \\
&= 0 + p \\
&= p
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geqslant 5]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=5}^{+\infty} [X=k]\right) && \text{or les évènements sont 2 à 2 incompatibles} \\
&= \sum_{k=5}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) && \text{(et la série } \textstyle\sum \mathbb{P}([X=k]) \text{ cv)} \\
&= \sum_{k=5}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p \\
&= p \sum_{\ell=4}^{+\infty} (1-p)^{\ell} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= p(1-p)^4 \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^4
\end{aligned}$$

De la même manière, on a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X<10]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{9}[X=k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{9}\mathbb{P}([X=k]) && \text{car les évènements sont disjoints} \\
&= \sum_{k=1}^{9}(1-p)^{k-1}p \\
&= p\sum_{\ell=0}^{8}(1-p)^{\ell} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell=k-1 \\
&= p\frac{1-(1-p)^9}{1-(1-p)} \\
&= 1-(1-p)^9
\end{aligned}$$

Proposition 1.7 Soit X une variable aléatoire discrète.

- La famille $([X=k])_{k\in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènements.
- La série $\sum_{k\in X(\Omega)}\mathbb{P}([X=k])$ converge et sa somme vaut 1.

Le deuxième point de la proposition précédente peut servir soit à *vérifier nos calculs*, soit à *trouver une probabilité manquante ou un paramètre manquant*.

Exemple 1.8 Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{P}([X=k])=\frac{a}{3^k}$$

Déterminer la valeur du paramètre a.

On doit avoir

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k])=1.$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=k])=a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=a\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}a$$

Donc, on doit choisir

$$a=\frac{2}{3}$$

Exemple 1.9 On effectue une succession infinie de tirages avec remises dans une urne composée de deux boules noires et huit boules blanches. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées avant l'obtention de la première boule noire. On attribue à X la valeur -1 si aucun boule noire n'est tirée. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, B_n l'évènement «Obtenir une boule blanche lors du tirage n.» Déterminer la loi de X.

Tout d'abord, on a déjà vu que $X(\Omega)=\{-1\}\cup\mathbb{N}$.

- Déterminons $\mathbb{P}(X=0)$. On a,

$$\begin{aligned}
[X=0] \text{ réalisé} \quad &\text{ssi} \quad \text{on n'obtient aucune boule blanche avant la première noire} \\
&\text{ssi} \quad \text{on obtient une boule noire dès le premier tirage}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(\overline{B}_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \qquad \text{car les tirages sont équiprobables}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons $\mathbb{P}(X = n)$.

$$\begin{array}{lll} [X = n] \text{ réalisé} & \text{ssi} & \text{on obtient } n \text{ boules blanches avant la première noire} \\ & \text{ssi} & \text{on obtient blanc pour tirage 1 à } n \text{ puis noir au tirage } n+1 \end{array}$$

D'où,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(B_1 \cap \cdots B_n \cap \overline{B}_{n+1})$$

Or, comme les évènements sont mutuellement indépendants,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{8}{10} \times \cdots \times \frac{8}{10} \times \frac{2}{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{1}{5}$$

On remarque que cette formule contient finalement aussi le cas $n = 0$.

- Comme $X(\Omega) = \{-1\} \cup \mathbb{N}$, la famille $(X = n)_{n \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'évènement donc,

$$\mathbb{P}(X = -1) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$$

la série intervenant dans l'égalité étant convergente. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = -1) &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{1}{5} \\ &= 1 - \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.3 Transformation d'une variable aléatoire

Proposition 1.10 Soient X une variable aléatoire réelle sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire réelle sur Ω dont la loi est donnée par

- $Y(\Omega) = \{g(x), x \in X(\Omega)\}$
- Pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([Y = y]) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} \mathbb{P}([X = x])$$

Exemple 1.11 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = (1 - p)^{k-1} p$$

Déterminer la loi de $Y = 2X - 1$.

- **Étape 1 : Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.** Tout d'abord,

x	1	2	3	4	...
$2x - 1$	1	3	5	7	...

Donc,

$$Y(\Omega) = \{2k - 1,\ k \in \mathbb{N}^*\}$$

- **Étape 2 : Déterminer la loi de la variable aléatoire.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = 2k-1]) &= \mathbb{P}([2X-1 = 2k-1]) \\ &= \mathbb{P}([X = k]) \\ &= (1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$

2 Moments d'une variable aléatoire

2.1 Espérance

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω. On dit que X admet une **espérance** lors que la série

$$\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

converge *absolument*. Dans ce cas, l'**espérance** de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est la somme de cette série. L'espérance représente la *moyenne* de toutes les valeurs prises par la variable aléatoire.

Une variable aléatoire finie admet forcément une espérance (car il n'y a qu'un nombre fini de termes dans la somme). Il faut vérifier la convergence *absolue* de la série seulement lorsque la variable aléatoire est discrète (infinie).

Proposition 2.2 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une espérance.

1. Si $X(\Omega) \subset [a,b]$ alors $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.
2. Si X est une variable aléatoire à valeurs positives, c-à-d $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
3. La variable aléatoire X est dite centrée lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.
4. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Exemple 2.3 Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1}p$$

La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

On s'intéresse à la convergence de la série suivante

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |k \cdot P([X = k])| \quad \text{c-à-d} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left|k \cdot (1-p)^{k-1}p\right| \quad \text{c-à-d} \quad p\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k(1-p)^{k-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée d'ordre 1 convergente car de paramètre $p \in]-1,1[$. Donc, la série $\sum k \cdot P([X = k])$ converge **absolument** et la variable X admet une espérance qui est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Exemple 2.4 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{k(k+1)}$$

La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

On s'intéresse à la convergence de la série suivante

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |k \cdot P([X = k])| \quad \text{c-à-d} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left|k \cdot \frac{1}{k(k+1)}\right| \quad \text{c-à-d} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k+1}$$

Or la série $\sum \frac{1}{k+1}$ ne converge pas absolument(série de Riemann d'exposant 1). Donc la série $\sum k \cdot P([X = k])$ ne converge pas absolument. Donc la variable X n'admet pas d'espérance.

Proposition 2.5 — Théorème de transfert. Soient X une variable aléatoire discrète et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors la variable aléatoire $Y = g(X)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

converge *absolument*. Dans ce cas, $\mathbb{E}(g(X))$ est la somme de cette série.

Le théorème de transfert permet de calculer l'espérance de $g(X)$ sans déterminer sa loi.

Exemple 2.6 Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1} p$$

La variable aléatoire $Y = X^2$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Notons $q = 1 - p \in]0,1[$. On s'intéresse à la convergence de la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} |k^2 \cdot P([X = k])| \quad \text{c-à-d} \quad p \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 q^{k-1}$$

Or,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad k^2 q^{k-1} = k(k-1)q^{k-1} + kq^{k-1} = qk(k-1)q^{k-2} + kq^{k-1}$$

Or la série $\sum k(k-1)q^{k-2}$ est une série géométrique dérivée d'ordre 2 qui converge car $q \in]-1,1[$ et a série $\sum kq^{k-1}$ est une série géométrique dérivée d'ordre 1 qui converge aussi car $q \in]-1,1[$. Donc, par opérations sur les séries à termes positifs, la série $\sum k^2 q^{k-1}$ converge, c'est-à-dire la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 \cdot P([X = k])$$

converge absolument. Donc, la variable aléatoire $Y = X^2$ admet une espérance et son espérance est donnée par

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \cdot P([X = k]) \\
&= pq \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + p \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\
&= pq \times \frac{2}{(1-q)^3} + p \times \frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

2.2 Variance

Définition 2.7 Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω. On dit que X admet une **variance** lorsque

- X admet une espérance
- et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet aussi une espérance.

Dans ce cas, la variance de X est donnée par

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

! Une variable aléatoire finie admet forcément une variance.

Proposition 2.8 — Formule de Koenig-Huygens. Soit X une variable aléatoire réelle discrète.

Si
- X admet une espérance,
- et X^2 admet une espérance,

alors X admet une variance et dans ce cas,

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Proposition 2.9 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω admettant une variance.
1. Alors $V(X) \geqslant 0$.
2. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $Y = aX + b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.
3. Lorsque $V(X) = 1$, X est dite réduite.

Exemple 2.10 Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = (1-p)^{k-1} p$$

La variable X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

On a déjà montré que (cf Exemple 2.3) X admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

On a aussi montré que (cf Exemple 2.6) X^2 admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Donc, d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, X admet une variance qui vaut

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

2.3 Écart-type

Définition 2.11 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart-type de X est le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

La variance et l'écart-type mesurent l'écart entre les valeurs prises par la variable aléatoire et son espérance, ce sont des mesures de *dispersion*.

Proposition 2.12 Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle. Alors,

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée - c-à-d $\mathbb{E}(X^*) = 0$ - et réduite - c-à-d $V(X^*) = 1$-, appelée **variable aléatoire centrée réduite associée à X.**

Démonstration. Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance non nulle et

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire centrée. Par **linéarité** de l'espérance, on a,

$$\mathbb{E}(X^*) = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)}(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0$$

- Montrons que X^* est une variable aléatoire réduite. On a,

$$V(X) = V\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2} V(X) = 1$$

■

3 Lois usuelles discrètes infinies

3.1 Loi géométrique

Définition 3.1 Soit $p \in]0, 1]$. Une variable aléatoire X **géométrique de paramètre** p est une variable aléatoire discrète (infinie) à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = (1 - p)^{k-1} p$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Cette variable admet une espérance et une variance qui valent

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

? Situation typique : On considère une épreuve ayant deux issues : le **succès et l'échec**, la probabilité d'obtenir un succès étant de p. On **répète** une **infinité** de fois une telle épreuve de manière identique et indépendante. On associe à cette expérience la variable aléatoire X égale au **rang du premier succès** obtenus alors de ces épreuves. Alors X suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Ces situations peuvent être représentées par des diagrammes en barres comme ceux ci-dessous.

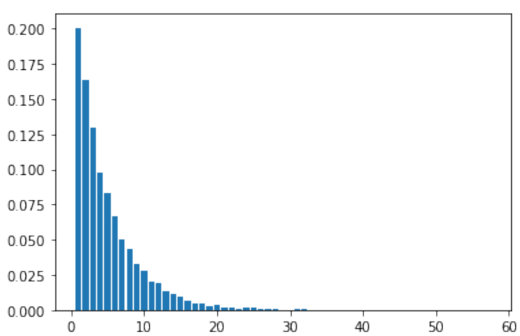


Diagramme pour $p = 0.2$

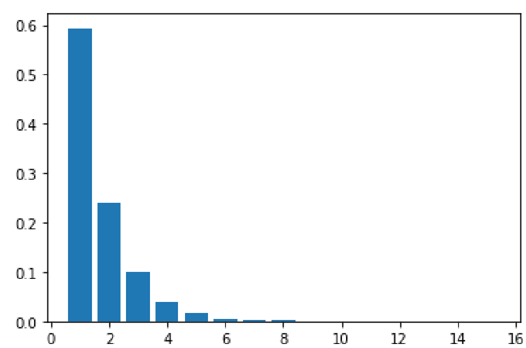


Diagramme pour $p = 0.6$

Exemple 3.2 On dispose de deux dés équilibrés que l'on lance en même temps une infinité de fois. On note X le nombre de lancers nécessaire à l'obtention d'un double 6. Déterminer la loi de X.

- On a au départ une épreuve de Bernoulli : on lance deux dés, on obtient un double six (le succès) avec probabilité $1/36$ (car les lancers sont uniformes et indépendants).
- On répète une infinité de fois cette expérience, de manière identique et indépendante.
- La variable aléatoire X compte le rang du premier succès. Elle suit donc une loi $\mathcal{G}(\frac{1}{36})$.

3.2 Loi de Poisson

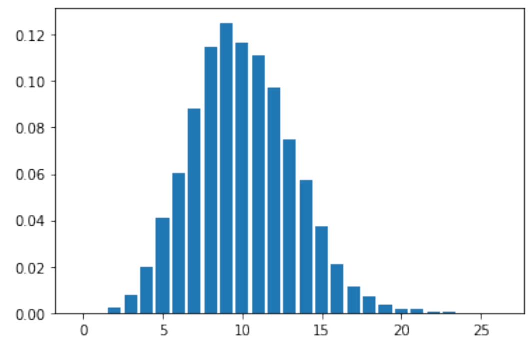
Définition 3.3 Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X **de Poisson de paramètre** λ est une variable aléatoire discrète (infinie) à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Cette variable admet une espérance et une variance qui valent

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad V(X) = \lambda$$

Cette loi n'a pas de modèle type. Elle intervient quand on modélise le nombre de personnes arrivant dans une file d'attente pendant un temps donné (sous certaines conditions) De telles situations peuvent être représentée par un diagramme en barres omme ci-contre.



Preuve de l'espérance. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrons d'abord que X admet une espérance.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad |k \cdot \mathbb{P}([X = k])| = \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

Donc la série $\sum k \cdot \mathbb{P}([X = k])$ converge absolument car on reconnaît une série exponentielle. Donc la variable aléatoire X admet une espérance et celle-ci est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}([X = k]) \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} && \text{en faisant le cht d'indice } \ell = k-1 \\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

■

Preuve de la variance. Montrons que X admet une variance. D'après le **théorème de Koenig-Huygens**, il suffit de montrer que X^2 admet une espérance. D'après le **théorème de transfert**, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k])$$

converge absolument. Or, on a,

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \quad |k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k])| &= e^{-\lambda} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^k \times \frac{k(k-1)+k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

Donc, par somme de deux séries exponentielles, la série $\sum k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k])$ converge absolument et X^2 admet une espérance et celle-ci vaut,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \mathbb{P}([X = k]) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda \mathrm{e}^{\lambda} \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

Comme X et X^2 admettent une espérance, d'après le **théorème de Koenig-Huygens**, X admet une variance qui vaut

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

■