TD 25 – V. A. Infinies (Correction)

Savoir déterminer et manipuler une loi

Exercice 1 – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

1. Vérifier que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X = k)$ converge et que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

   En utilisant le fait que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   on peut reconnaître une série télescopique et en déduire le résultat.

2. En déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

   $\mathbb{P}(X = 0) = 0$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 2 – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}([X=k]) = a3^{-k}$$

1. Déterminer la valeur du paramètre a.

   On a $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) = 1$ pour $a=2$.

2. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

   - La série $\sum k\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument (on reconnaît une série géométrique convergente car de paramètre $\frac{1}{3} \in]-1,1[$), donc X admet une espérance et elle vaut

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k}{3^k} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{2}$$

   - La série $\sum k^2\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument (on reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et une dérivée d'ordre 2 qui convergent car de paramètre $\frac{1}{3} \in]-1,1[$), donc X^2 admet une espérance par théorème de transfert et elle vaut

   $$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k^2}{3^k} = \frac{2}{9}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{3^{k-2}} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = 3$$

   - Comme X et X^2 admettent une espérance, par théorème de Koenig-Huygens, X admet une variance qui vaut

   $$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

3. X a t-elle plus de chance de prendre une valeur paire ou une valeur impaire ?

   La probabilité que X prenne une valeur paire est donnée par,

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} [X=2k]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=2k]) = \frac{1}{4}$$

   De la même façon, la probabilité que X prenne une valeur impaire est donnée par

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k+1]\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=2k+1]) = \frac{3}{4}$$

   Donc X a plus de chance de prendre une valeur impaire qu'une valeur paire.

4. On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

   On a $Y = X(X-1) = X^2 - X$. Comme X et X^2 admettent une espérance (cf Question 2), par linéarité de l'espérance Y admet une espérance qui vaut

   $$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Exercice 3 – On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall j\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=j)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

$\mathbb{E}(X)=\frac{2}{3}$

Exercice 4 – On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ telle que

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(X=n) = \frac{4(n-1)}{3^n}$$

Montrer que X admet une espérance et la calculer.

$\mathbb{E}(X) = 3$

Exercice 5 – Un perchiste participe à une compétition. La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées 1, 2, ..., n, ... et on fait les hypothèses suivantes.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la sauteur passe la hauteur n (s'il arrive à ce stade) est $1/n$.
- Il est éliminé dès qu'il manque un saut.

On admet que le perchiste est presque sûrement éliminé au bout d'un nombre fini de sauts. Soit alors X le nombre de sauts réussis par le perchiste.

1. Déterminer la loi de X.

   $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$

2. À l'aide du théorème de transfert, montrer que $Y = X + 1$ admet une espérance et la calculer.

   On a
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad |(k+1) \cdot \mathbb{P}([X = k])| = \frac{1}{(k-1)!}$$
   Donc la série $\sum (k+1) \cdot \mathbb{P}([X = k])$ converge absolument (série exponentielle), c'est-à-dire, par théorème de transfert, que $Y = X + 1$ admet une espérance qui est donnée par
   $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} = \mathrm{e}$$

3. En déduire que X admet une espérance et la calculer.

   Puis $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y - 1) = \mathbb{E}(Y) - 1 = \mathrm{e} - 1$.

Exercice 6 – Soit Y un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(Y = k) = \mathrm{e}^{-k} - \mathrm{e}^{-k-1}$$

Calculer la probabilité que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

soit inversible.

Reconnaître et manipuler les lois usuelles

Exercice 7 – Dans une urne composée de 2 boules rouges et de 3 boules bleues, nous tirons une infinité de boules. Les tirages se font avec remise et sont supposés indépendants. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule bleue pour la première fois. Déterminer la loi de N et son espérance.

$N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{3}{5}\right)$. Donc
$$\mathbb{E}(N) = \frac{5}{3} \qquad \text{et} \qquad V(N) = \frac{10}{9}$$

Exercice 8 – Un dé équilibré à 6 faces est lancé successivement deux fois. On note S la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus au cours de ces deux lancers.

1. Quelle est la loi de S ?

On appelle manche l'expérience réalisée précédemment. Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir un 7 lors d'une manche. On note T la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.

2. Quelle est la loi de T ? Préciser l'espérance et la variance de T.

Exercice 9 – On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$$

1. Reconnaître la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

   X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{5}$ donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{15}{4}$$

2. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant n)$.

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Exercice 10 – On considère la variable aléatoire T dont la loi est donnée par

$$T(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

On pose $Y = T + 1$.

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer $\mathbb{P}(Y = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(T = k - 1)$.
3. En déduire la loi de Y et reconnaître une loi usuelle.
4. En déduire l'espérance et la variance de Y.
5. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 11 – On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{\mathrm{e}k!}.$$

1. Reconnaître la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

   $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ donc $\mathbb{E}(X) = 1$.

2. Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$.

   $Y(\Omega) = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$ et
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([Y = 2k+1]) = \frac{1}{\mathrm{e}k!}.$$

3. Montrer que Y admet une espérance et la déterminer.

   Par linéarité de l'espérance,
   $$\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{E}(X) + 1 = 3$$

Exercice 12 – Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. On note Z la variable aléatoire égale au maximum de X_1 et de X_2.

1. Que vaut $Z(\Omega)$?

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

2. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leqslant n)$.
3. Justifier que
$$[Z \leqslant n] = [X_1 \leqslant n] \cap [X_2 \leqslant n]$$
4. En déduire la valeur de $\mathbb{P}([Z \leqslant n])$.
5. Justifier que
$$\mathbb{P}([Z = n]) = \mathbb{P}([Z \leqslant n]) - \mathbb{P}([Z \leqslant n-1])$$
6. En déduire $\mathbb{P}([Z = n])$.
7. Vérifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}([Z = n])$ converge et que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = n]) = 1$$