Interrogation du 05/05/2025

NOM Prénom :

Déterminer la dimension des trois sous-espaces vectoriels suivants :

$$F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z=0\}$$

$$F_3 = \{(t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

On prendra soin de **justifier** précisément et rigoureusement les réponses.

1) Dimension de F_1

On peut commencer par remarquer que
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Donc $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}\right)$
$$\boxed{= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}$$

- Par construction, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F_1.
- De plus, la famille est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (car il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$)

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une Base de F_1.

Donc $\boxed{\dim(F_1) = \mathrm{card}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 2}$

2) Dimension de F_2

On a :

$$\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in F_2 &\iff x+2y-z=0 \\
&\iff x = -2y+z \\
&\iff u = \begin{pmatrix}-2y+z\\y\\z\end{pmatrix} \\
&\iff u = y\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\
&\iff u \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{F_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)}$

Tournez la page →

- Par construction, la famille $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F_2
- De plus, la famille est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une Base de F_2

Donc $\boxed{\dim(F_2) = \mathrm{card}\left(\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 2}$

3) Dimension de F_3

On a :

$$\begin{aligned} u \in F_3 &\iff \exists t \in \mathbb{R},\ u = \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R},\ u = t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)}$

- Par construction, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice de F_3
- De plus, cette famille est libre car $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une Base de F_3.

Donc $\boxed{\dim(F_3) = \mathrm{card}\left(\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 1}$