TD 26 – Intégration sur un segment

Exercice 1 – Reconnaissance de primitives/formes. Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer.

$$I_1 = \int_4^5 \frac{1}{3-t}\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_1^2 (3x-1)^2\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_1^2 \frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x \qquad I_5 = \int_0^4 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \qquad I_6 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$$

Exercice 2 – Fractions Rationnelles.

1. On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ par
$$\forall x \in]-\infty,1[, \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$$
Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall x \in]-\infty,1[, \qquad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$
En déduire une primitive de f sur $]-\infty,1[$.
2. Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2-4x+1}$ sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ *On pourra factoriser le dénominateur de la fraction rationnelle.*

Exercice 3 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 t\exp(-2t)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^{4t}\mathrm{d}t$

Exercice 4 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive des fonctions suivantes sur leur domaine de définition.

1. $f : x \mapsto (2x+1)\exp(3x)$
2. $g : x \mapsto x^2\ln(x)$

Exercice 5 – Intégration par parties. Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties successives, l'intégrale suivante,

1. $\displaystyle\int_0^1 (t^2+1)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^2\mathrm{d}x$

Exercice 6 – Changement de variables. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(x))^n}{x}\mathrm{d}x$ en posant $y = \ln(x)$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ en posant $t = \mathrm{e}^x$
3. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \mathrm{d}t\,(x>0)$ en posant $u = 1+\dfrac{1}{t}$
4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}\mathrm{d}t$ en posant $u = \ln(t)$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ en posant $x = \mathrm{e}^{-t}$
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$ en posant $t = x^2$

Exercice 7 – Théorème fondamental. Dans chaque cas, justifier que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

1. $F_1 : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$
2. $F_2 : x \mapsto \displaystyle\int_0^{2x} \exp(t^3)\,\mathrm{d}t$
3. $F_3 : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \ln(t^2+2)\,\mathrm{d}t$

Exercice 8 – On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
4. En utilisant la question 2, montrer que $nI_n \leqslant \mathrm{e}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 – Soit f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_0(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (1-x)^n\mathrm{e}^{-3x}$. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n+1}{3}I_n$.
3. En déduire la valeur de I_1 et I_2.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
5. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 – On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}I_n$$

3. Calculer alors I_1 et I_2.

Exercice 11 – Ecricome Maths S 2016. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b\mathrm{d}x$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \qquad f_{a,b}(x) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!}x^a(1-x)^b$$

1. Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \qquad I_{a,b} = \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1}$$

3. En déduire que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \qquad I_{a,b} = \frac{a!\times b!}{(a+b+1)!}$$

4. En déduire que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \qquad \int_0^1 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = 1$$