Exercice 1 – Reconnaissance de primitives/formes.

$$I_1 = \int_4^5 \frac{1}{3-t}\mathrm{d}t = -\ln(2) \qquad I_2 = \int_1^2 (3x-1)^2\mathrm{d}x = 13$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(2) \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = 1-\ln(2)$$

$$I_5 = \int_0^4 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = 1-\mathrm{e}^{-8} \qquad I_6 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}-2$$

Exercice 2 – Fractions Rationnelles.

1. On a
$$\forall x \in]-\infty,1[, \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4x+3} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}\frac{1}{x-3}.$$
Donc une primitive de f sur $]-\infty,1[$ est donnée par
$$x \mapsto -\frac{3}{2}\ln(1-x) + \frac{7}{2}\ln(3-x)$$

2. Une primitive de $g : x \mapsto \dfrac{1}{4x^2-4x+1}$ sur $\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ est donnée par
$$x \mapsto -\frac{1}{2(2x-1)}$$

Exercice 3 – Intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_0^1 t\exp(-2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2}$

2. $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\mathrm{e}^{4t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^4}{16} - \frac{5}{16}$

Exercice 4 – Intégration par parties.

1. Une primitive de $f : x \mapsto (2x+1)\exp(3x)$ sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{9}(6x+1)\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{9}$$

2. Une primitive de $g : x \mapsto x^2 \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$$

Exercice 5 – Intégration par parties.

1. $\int_0^1 (t^2+1)\mathrm{e}^t \mathrm{d}t = 2\mathrm{e}-3$
2. $\int_1^2 (\ln(x))^2 \mathrm{d}x = 2(\ln 2)^2 - 4\ln(2) + 2$

Exercice 6 – Changement de variables.

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{(\ln(x))^n}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 y^n \mathrm{d}y = \frac{1}{n+1}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln(\mathrm{e}+1) - \ln(2)$

3. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \mathrm{d}t = -\int_1^{1+\frac{1}{x}} u^4 \mathrm{d}u = \frac{32}{5} - \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5$

4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)+1}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u}} = 2\sqrt{2}-2$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} + \ln(1+\mathrm{e}) - \ln(2)$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \frac{3}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(5)$

Exercice 7 – Théorème fondamental.

1. La fonction F_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_1'(x) = \sqrt{x^2+1}$$
2. La fonction F_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_2'(x) = 2\exp(8x^3)$$
3. La fonction F_3 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_3'(x) = 3x^2\ln(x^6+2) - 2x\ln(x^4+2)$$

Exercice 8 –

1. On a,
$$I_0 = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^0 \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 1 \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant une intégration par parties, on obtient,
$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\forall x \in [1, \mathrm{e}], \qquad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant 1 \qquad \text{donc} \qquad 0 \leqslant (\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$$
Donc par croissance de l'intégrale, on obtient
$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la Question 2,
$$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$
Donc
$$nI_n = \mathrm{e} - (I_n + I_{n+1})$$
Or $I_n + I_{n+1} \geqslant 0$ donc
$$nI_n \leqslant \mathrm{e}$$
Finalement, on a obtenu
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n}$$
Donc par théorème d'encadrement, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie qui vaut 0.

Exercice 9 – Soit f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_0(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et soit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par, pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^{-3x}$. On pose,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$.
3. En déduire la valeur de I_1 et I_2.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
5. En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 10 – On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

3. Calculer alors I_1 et I_2.

Exercice 11 – Ecricome Maths S 2016. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1-x)^b \mathrm{d}x$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1], \qquad f_{a,b}(x) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!}x^a(1-x)^b$$

1. Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \qquad I_{a,b} = \frac{b}{a+1}I_{a+1,b-1}$$

3. En déduire que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \qquad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$

4. En déduire que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \qquad \int_0^1 f_{a,b}(x)\mathrm{d}x = 1$$