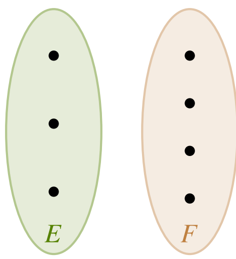
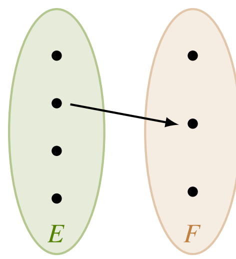
27 Applications Linéaires

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

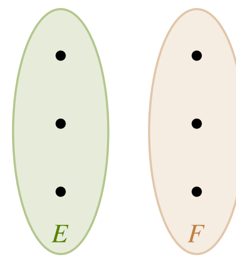
f est *injective*	Tout élément de F admet **au plus** un antécédent.
f n'est *pas injective*	Il existe un élément de F avec deux (ou plus) antécédents.
f est *surjective*	Tout élément de F admet **au moins** un antécédent.
f n'est *pas surjective*	Il existe un élément de F qui n'admet pas d'antécédent.
f est *bijective*	Tout élément de F admet **un unique** un antécédent.



Exemple d'une application *injective* et *non surjective*



Exemple d'une application *non injective* et *surjective*



Exemple d'une application *injective* et *surjective*

1 Application linéaire entre espaces vectoriels

1.1 La notion de linéarité

Définition 1.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application. On dit que f est une **application linéaire** lorsqu'elle préserve les combinaisons linéaires, c'est-à-dire,

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n, \qquad f(a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v)$$

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Remarque 1.2 La relation de la Définition 1.1 se généralise à plus de termes. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \qquad \forall u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n, \qquad f(a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n) = a_1 f(u_1) + \cdots + a_n f(u_n)$$

? **Méthode 1 - Savoir manipuler une application linéaire.**

Exemple 1.3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $f(1) = 1$. Déterminer l'expression de f.

Attention, le raisonnement de l'Exemple précédent est faux si l'application suivante n'est plus linéaire. En effet, les deux fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \ln(x) + 1$ prennent toutes les deux la valeur 1 en 1, mais ce ne sont pas des fonctions identités.

Exemple 1.4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $f(1,0) = 2$ et $f(0,1) = 3$. Déterminer l'expression de f.

Ces deux exemples illustrent de manière informelle que la notion de linéarité impose une certaine *rigidité* à l'application. Finalement, en connaissant un nombre restreint de valeurs de la fonction, grâce à la linéarité, on en déduit toutes les autres valeurs. Plus rigoureusement, *une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base de l'espace de départ*.

Méthode 2 - Savoir montrer qu'une application est linéaire.

Pour montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire, la rédaction est la suivante :

> « *Soient a et b deux nombres réels et u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrons que*
> $f(au+bv) = af(u)+bf(v)$. »

Exemple 1.5 Montrer que l'application f suivante est linéaire,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,-x-y) \end{array}$$

Exemple 1.6 Montrer que l'application f suivante est linéaire,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, x+3y-z) \end{array}$$

Méthode 3 - Savoir montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Pour montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ n'est pas linéaire, il s'agit de trouver deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ tels que
$$f(u+v) \neq f(u) + f(v).$$

Exemple 1.7 Montrer que l'application f suivante n'est pas linéaire,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

Proposition 1.8 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire.
$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

Exemple 1.9 Montrer que l'application f suivante n'est pas linéaire,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (3x-y, x+5y+1) \end{array}$$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 1.10 Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire. Autrement dit,

$$\forall \mu,\lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall f,g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) \qquad \mu f+\lambda g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$$

On dit que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Soient μ, λ dans $\mathbb{R}$ et f, g dans $\mathcal{L}(E,F)$, c'est-à-dire deux applications linéaires de E dans F. Montrons que $\mu f+\lambda g$ est dans $\mathcal{L}(E,F)$, c'est-à-dire montrons que l'application $h = af+bg$, qui va de E dans F, est linéaire.

Soient a et b deux nombres réels et u et v deux vecteurs de E. Montrons que

$$h(au+bv) = ah(u)+bh(v).$$

En utilisant la linéarité de f et celle de g, on a

$$\begin{aligned}
h(au+bv) &= (\mu f+\lambda g)(au+bv)\\
&= \mu f(au+bv)+\lambda g(au+bv)\\
&= \mu(af(u)+bf(v))+\lambda(ag(u)+bg(v))\\
&= a(\mu f(u)+\lambda g(u))+b(\mu f(v)+\lambda g(v))\\
&= a(\mu f+\lambda g)(u)+b(\mu f+\lambda g)(v)\\
&= ah(u)+bh(v)
\end{aligned}$$

Donc l'application h est linéaire, c'est-à-dire $h \in \mathcal{L}(E,F)$. ■

Proposition 1.11 Toute composée d'applications linéaires (si elle est bien définie) est une application linéaire. Autrement dit,

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p), \qquad \forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^m) \qquad g\circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$$

Démonstration. Soient f dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ et g dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^m)$. Montrons que $g\circ f$ est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, c'est-à-dire montrons que l'application $g\circ f$, qui va de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire.

Soient a et b deux nombres réels et u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrons que

$$(g\circ f)(au+bv) = a(g\circ f)(u)+b(g\circ f)(v).$$

En utilisant la linéarité de f et celle de g, on a

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(au+bv) &= g(f(au+bv))\\
&= g(af(u)+bf(v))\\
&= ag(f(u))+bg(f(v))\\
&= a(g\circ f)(u)+b(g\circ f)(v)
\end{aligned}$$

Donc l'application $g\circ f$ est linéaire, c'est-à-dire $g\circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. ■

Définition 1.12 Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}$. On note f^k l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par

$$f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{si } k=0 \qquad \text{et} \qquad f^k = f\circ\cdots\circ f \quad \text{si } k>0$$

Exemple 1.13 On considère l'application

$$\begin{array}{cccc}
f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\
& (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, x+3y-z, x+y)
\end{array}$$

Calculer f^2.

2 Noyau d'une application linéaire

2.1 Définition du noyau d'une application linéaire

Définition 2.1 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On appelle **noyau** de l'application f l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = 0_{\mathbb{R}^p}\} \quad \subset \mathbb{R}^n$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des antécédents de $0_{\mathbb{R}^p}$ par l'application f.

? **Méthode 4 - Déterminer le noyau d'une application linéaire**

Pour déterminer le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, il s'agit de trouver l'ensemble des antécédents de $0_{\mathbb{R}^p}$ par f, c'est-à-dire de résoudre l'équation $f(u) = 0_{\mathbb{R}^p}$ d'inconnue $u \in \mathbb{R}^n$. Une rédaction appropriée peut être

« *Soit* $u \in \mathbb{R}^n$. *On a*

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad f(u) = 0_{\mathbb{R}^p} \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$$ »

Exemple 2.2 Déterminer le noyau de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (2x - y, x + 3y - z)$$

Comme illustré sur cet exemple, en dimension finie, la recherche du *noyau* d'une application linéaire peut toujours se ramener à la résolution d'un *système linéaire homogène*.

2.2 Lien entre le noyau d'une application linéaire et son injectivité

Définition 2.3 — Rappel. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que l'application $f : E \to F$ est **injective** si

$$\forall (x,x') \in E^2, \qquad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$$

Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au plus un antécédent dans E par f.

Proposition 2.4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On a

$$\text{L'application } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \text{ est injective} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Autrement dit, l'application f est injective si et seulement si l'élément $0_{\mathbb{R}^p}$ admet un unique antécédent par f donné par $0_{\mathbb{R}^n}$.

? **Méthode 5 - Déterminer si une application linéaire est injective**

Pour déterminer si une application linéaire est injective,

- Étape 1 : Déterminer le noyau de l'application.
- Étape 2 : Conclure quant à l'injectivité
  - Si le noyau est réduit à l'élément neutre, alors la fonction est injective.
  - Si le noyau n'est pas réduit à l'élément neutre, alors la fonction n'est pas injective.

Exemple 2.5 Déterminer si l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est injective où f est définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (2x - y, x + 3y - z)$$

Exemple 2.6 Déterminer si l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est injective où f est définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (x, 3x, x - y)$$

3 Image d'une application linéaire

3.1 Définition de l'image d'une application linéaire

Définition 3.1 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On appelle **image** de l'application f l'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^n\} = \{v \in \mathbb{R}^p \mid \exists u \in \mathbb{R}^n,\ v = f(u)\} \quad \subset \mathbb{R}^p$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des valeurs prises par l'application f.

On appelle **rang** de l'application linéaire f la dimension de son image, c'est-à-dire

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Méthode 6 - Déterminer l'image d'une application linéaire

Pour déterminer l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, il s'agit de trouver l'ensemble des vecteurs v de $\mathbb{R}^p$ tel que l'équation $v = f(u)$ d'inconnue $u \in \mathbb{R}^n$ admette au moins une solution. Une rédaction appropriée peut être

« *Soit* $v \in \mathbb{R}^p$. *On a*

$$v \in \mathrm{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \in \mathbb{R}^n,\ f(u) = v \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$$ »

Exemple 3.2 Déterminer l'ensemble image de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x+2y+z, 3x-3z, x+y)$$

3.2 Déterminer une base de l'image d'une application

Proposition 3.3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, autrement dit,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \dots, f(u_n))$$

Méthode 7 - Déterminer une base de l'image d'une application linéaire

Pour déterminer une base l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, on peut

- Choisir une base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de l'espace de départ par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Expliciter la famille $\mathcal{G} = (f(u_1), \dots, f(u_n))$ en calculant les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.
- Extraire une base de la famille $\mathcal{G}$.
  - Par construction, la famille $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
  - Soit cette famille est libre et alors c'est une base.
  - Soit cette famille est liée et on "supprime des vecteurs" jusqu'à la rendre libre.

Exemple 3.4 Déterminer une base de l'image de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z)$$

3.3 Lien entre l'image d'une application linéaire et sa surjectivité

Définition 3.5 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que l'application $f : E \to F$ est **surjective** si

$$\forall y \in F, \qquad \exists x \in E, \qquad y = f(x).$$

Autrement dit, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent dans E par f.

Proposition 3.6 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On a

$$\text{L'application } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \text{ est surjective} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^p$$

Méthode 8 - Déterminer si une application linéaire est surjective

Pour déterminer si une application linéaire est injective,

- Étape 1 : Déterminer l'image de l'application.
- Étape 2 : Conclure quant à la surjective
  - Si l'image est tout l'ensemble d'arrivée, alors la fonction est surjective.
  - Si l'image n'est pas tout l'ensemble d'arrivée, alors la fonction n'est pas surjective.

Exemple 3.7 Déterminer si l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est surjective où f est définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (x + 2y + z, 3x - 3z, x + y)$$

4 Théorème du rang et ses conséquences

4.1 Énoncé du théorème du rang

Proposition 4.1 — Théorème du rang. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

autrement dit,

$$n = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Méthode 9 - Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire

- Étape 1 : On commence par déterminer soit le noyau soit l'image de l'application linéaire (grâce aux Méthodes 4, 6 et 7) en choisissant celui qui semble le plus simple (ou celui qui est demandé en premier).
- Étape 2 : On utilise le théorème du rang pour déterminer la dimension de l'autre espace.
- Étape 3 : Puis, on détermine le second ensemble en utilisant l'information sur sa dimension.

Exemple 4.2 On considère l'application linéaire suivante.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, y-z) \end{array}$$

Déterminer l'image puis le noyau de cette application linéaire.

Exemple 4.3 On considère l'application linéaire suivante.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z, 2x-2z) \end{array}$$

Déterminer le noyau, le rang puis l'image de cette application linéaire.

4.2 Conséquence pour la bijectivité d'une application linéaire

Proposition 4.4 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Si $n = p$ alors

$$f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$

Autrement dit, si $n = p$ alors

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}(f) = n \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$

Exemple 4.5 On considère l'application linéaire suivante.

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-z, 2x+y+z) \end{array}$$

Montrer que cette application linéaire est bijective.