TD 27 – Applications Linéaires

1 Linéarité d'une application

Exercice 1 – ***Méthode 2, Exemples 1.5 & 1.6.*** Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

i) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,-x+3y) \end{array}$
ii) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2} \end{array}$

iii) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y,x-y-2z,x+z) \end{array}$
iv) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & (x,2x,0) \end{array}$

Exercice 2 – ***Méthode 3, Exemples 1.7 & 1.9.*** Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires.

i) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2z,y,z-1,x+y+z) \end{array}$
ii) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,y-x^2) \end{array}$

Exercice 3 – Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

i) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,-x^3+3y) \end{array}$
ii) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x+y,x-y) \end{array}$

iii) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$
iv) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$

2 Composition de deux applications linéaires

Exercice 4 – Soient f et g les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = (x-y,x+y) \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ g(x,y) = (2x-3y,2y)$$

Donner l'expression de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

3 Noyau d'une application et injectivité

Exercice 5 – ***Méthode 4, Exemple 2.2.*** Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes et en donner une base.

i) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y-x,z+y,x+y+2z) \end{array}$
ii) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$

Exercice 6 – ***Méthode 5, Exemples 2.5 & 2.6.*** Déterminer si les applications linéaires suivantes sont injectives ou non ? Justifier.

i) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x-y,x+y) \end{array}$
ii) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-3x-y+z,8x+3y-2z,-4x-y+2z) \end{array}$

4 Image d'une application et surjectivité

Exercice 7 – ***Méthode 6, Exemple 3.2.*** Déterminer l'image (sous forme conditionnelle) des applications linéaires suivantes et dire si elles sont surjectives ou non.

i) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z,x-y-z,x+5y+3z) \end{array}$
ii) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y-z) \end{array}$

Exercice 8 – ***Méthode 7, Exemple 3.4.*** Déterminer une base de l'image des applications linéaires suivantes et dire si elles sont surjectives ou non.

i) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y+z,x-y+z,3x-7y+3z) \end{array}$
ii) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z,y-3z,2z) \end{array}$

5 Théorème du rang

Exercice 9 – ***Méthode 9, Exemple 4.3.*** On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y-z,-x+2y-z,-x-y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension de l'image de f.
4. En déduire une base de l'image de f.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 10 – ***Méthode 9, Exemple 4.2.*** On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y-x,z+y,x+y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de l'image de f et donner sa dimension.
3. En déduire la dimension du noyau de f.
4. En déduire une base du noyau de f.
5. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 11 – ***Exemple 4.5.*** On considère l'application suivante

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y,x-y+z,x+y) \end{array}$$

Montrer que cette application linéaire est bijective.

6 Pour aller plus loin

Exercice 12 – Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{array}{rclcrcl} f(e_1) & = & -e_2+e_3-e_4 & \qquad & f(e_2) & = & e_1-e_2+e_3 \\ f(e_3) & = & e_1+e_4 & & f(e_4) & = & e_2-e_3+e_4 \end{array}$$

1. Montrer que
$$\forall k=1,2,3,4, \qquad (f\circ f)(e_k)=0$$
2. Que peut-on en déduire pour $f\circ f$?
3. En déduire que
$$\mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{Ker}(f)$$

Exercice 13 – Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ donné par,

$$F=\{(x_1,\ldots,x_n)\in \mathbb{R}^n \mid x_1+\cdots+x_n=0\}.$$

On note, pour tout $i=1,\ldots,n-1$, $u_i=e_i-e_n$.

1. Montrer que
$$F=\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{n-1})$$
2. Montrer que la famille $(u_1,\ldots,u_{n-1})$ est une base de F.
3. En déduire la dimension de F.
4. Soit $w=(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $w_1+\cdots+w_n\neq 0$. Montrer que la famille $(u_1,\ldots,u_{n-1},w)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.