

Interrogation du 12/05/2025

NOM Prénom :

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3$? *On ne demande pas de justifier (pour une fois...).*
2. On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$.
- (b) En déduire que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3.

2. (a) Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Raisonnons par équivalence.

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{en remontant} \\ \text{le système de "bas en haut"} \end{matrix}$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$.

(b) La famille (u_1, u_2, u_3)

- est libre
- contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}^3$
i.e. $\text{card}(u_1, u_2, u_3) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Tournez la page →

3. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$$

Justifier que la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.

• Commençons par étudier la convergence de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} u_k$ où

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, u_k &= |k \cdot \mathbb{P}(X=k)| \\ &= \left| k \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \right| \\ &= \frac{1}{4} \times k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnaît (à une constante près) une série géométrique dérivée d'ordre 1 qui converge car $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$.

Donc la variable aléatoire X admet une espérance.

• L'espérance de X vaut :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{1}{16}} \\ &= \frac{1}{4} \times 16 \\ &= 4 \end{aligned}$$