

1 Linéarité d'une application

Exercice 1 –

Exercice 2 –

Exercice 3 –

i) Non ii) Oui

iii) Non iv) Oui

2 Composition de deux applications linéaires

Exercice 4 – On a,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (f \circ g)(x, y) = (2x - 5y, 2x - y)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (g \circ g)(x, y) = (-x - 5y, 2x + 2y)$$

3 Noyau d'une application et injectivité

Exercice 5 –

i) $\text{Ker}(f_1) = \text{Vect}((1, 1, -1))$
Base : $((1, 1, -1))$

ii) $\text{Ker}(f_2) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$
Base : $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$

Exercice 6 –

i) $\text{Ker}(f_1) = \{(0, 0)\}$
Injectivité : Oui

ii) $\text{Ker}(f_2) = \text{Vect}((1, -2, 1))$
Injectivité : Non

4 Image d'une application et surjectivité

Exercice 7 –

i) $\text{Im}(f_1) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid -2a + b + c = 0\}$
Surjectivité : Non

ii) $\text{Im}(f_2) = \mathbb{R}^2$
Surjectivité : Oui

Exercice 8 –

i) Base de $\text{Im}(f_1) : ((1, 1, 3), (-2, -1, -7))$
Surjectivité : Non

ii) Base de $\text{Im}(f_2) : ((2, 0, 0), (1, 1, 0), (-1, -3, 2))$
Surjectivité : Oui

5 Théorème du rang

Exercice 9 –

- Suivre Méthode 2.
- $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1
- $\text{Im}(f)$ est de dimension 2
- Une base de $\text{Im}(f)$ est $((2, -1, -1), (-1, 2, -1))$
- L'application f est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 10 –

- Suivre Méthode 2.
- Base de l'image : $((1, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 1))$ donc $\text{Im}(f)$ est de dimension 2
- Le noyau est donc de dimension 1.
- Base du noyau : $((-1, -1, 1))$
- L'application f est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 11 –

- $\text{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$
- Les dimensions de l'espace de départ et d'arrivée sont les mêmes.

Donc f est bijective.