Interrogation du 26/05/2025

NOM Prénom :

1. Compléter les deux textes ci-dessous avec les informations nécessaires.

Soit $p \in]0,1]$. Une variable aléatoire X ***géométrique de paramètre*** *p est une variable aléatoire discrète (infinie) dont la loi est donnée par,*

$$X(\Omega) = \underline{\ \mathbb{N}^*\ } \quad \text{et} \quad \forall k \in \underline{\ \mathbb{N}^*\ },\ \mathbb{P}([X=k]) = \underline{\ p \times (1-p)^{k-1}\ }$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$. Cette variable admet une espérance et une variance qui valent

$$\mathbb{E}(X) = \underline{\ \frac{1}{p}\ } \quad \text{et} \quad V(X) = \underline{\ \frac{1-p}{p^2}\ }$$

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X ***de Poisson de paramètre*** *λ est une variable aléatoire discrète (infinie) dont la loi est donnée par,*

$$X(\Omega) = \underline{\ \mathbb{N}\ } \quad \text{et} \quad \forall k \in \underline{\ \mathbb{N}\ },\ \mathbb{P}([X=k]) = \underline{\ \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}\ }$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Cette variable admet une espérance et une variance qui valent

$$\mathbb{E}(X) = \underline{\ \lambda\ } \quad \text{et} \quad V(X) = \underline{\ \lambda\ }$$

2. Dans chacune des situations ci-dessous, identifier la loi de la variable aléatoire considérée (parmi toutes les lois usuelles) et simuler un tirage d'une telle variable aléatoire grâce à Python.

   (a) On réalise une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant 3 boules rouges et 7 boules bleues. On note X_1 la variable aléatoire égale au rang de la première boule rouge obtenue. Faire une simulation de X_1. $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{3}{10}\right)$

   ```
   [In]  rd.geometric(3/10)
   ```

   (b) On réalise 100 tirages avec remise dans une urne contenant 1 boule rouge et 4 boules bleues. On note X_2 la variable aléatoire égale au nombre total de boules bleues obtenues lors des 100 tirages. Faire une simulation de X_2. $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(100, \frac{4}{5}\right)$

   ```
   [In]  rd.Binomial(100,4/5)
   ```

   (c) On considère la variable aléatoire X_3 dont la loi est donnée par

   $$X_3(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_3 = k]) = \frac{3^k \times e^{-3}}{k!}$$

   Faire une simulation de X_3. $X_3 \hookrightarrow \mathscr{P}(3)$

   ```
   [In]  rd.poisson(3)
   ```

3. Calculer l'intégrale suivante à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_1 = \int_1^2 (x\ln(x))\mathrm{d}x$$

4. Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variables «$x = \sqrt{t}$» :

$$I_2 = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

3. On pose, pour tout $x \in [1,2]$:

$u(x) = \ln(x)$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x$ donc $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$
donc par intégration par parties, on a :

$$\boxed{I_1} = \int_1^2 x\ln(x)\,dx = \left[\ln(x)\times\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\,dx$$

$$= 2\ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

$$= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$

$$= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times 2^2 - \frac{1}{2}\times 1^2\right)$$

$$\boxed{= 2\ln(2) - \frac{3}{4}}$$

4. .. La fonction
$x \mapsto 2(1-x)$
est continue sur $[1,2]$

.. La fonction
$t \mapsto \sqrt{t}$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,4]$

Donc par changement de variables "$x = \sqrt{t}$", on a :

$$\boxed{I_2} = \int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

expression : $x = \sqrt{t}$, $t = x^2$

bornes : $t=1 \to x=1$, $t=4 \to x=2$

élément diff : $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$

$$= \int_1^2 \frac{1-x}{\cancel{x}}\,2\cancel{x}\,dx$$

$$= 2\int_1^2 (1-x)\,dx$$

$$= 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= 2\left(2 - \frac{2^2}{2} - \left(1 - \frac{1^2}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{= -1}$$