TD 28 – Équations Différentielles

Exercice 1 – EDL1 à coefficient constant homogène – *cf Exemple 2.4.*
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

i) $y' + y = 0$ ii) $y' - 4y = 0$ iii) $5y' = 6y$

Exercice 2 – EDL1 à coefficient constant avec second membre constant – *cf Exemple 2.8.*
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes. *(On cherchera la solution particulière sous forme d'une constante.)*

i) $y' - 3y = 5$ ii) $3y' = 7y - 8$ iii) $5y' = 6$

Exercice 3 – EDL1 à coefficient constant avec second membre – *cf Exemple 2.7.*
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

i) $y' + 2y = t^2$ *(On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto at^2 + bt + c$ avec a, b, c trois constantes à déterminer.)*
ii) $y' - 3y = te^{3t+t^2}$ *(On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto f(t)e^{3t}$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable à déterminer.)*

Exercice 4 – EDL2 à coefficients constants homogène – *cf Exemple 3.5.*
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

i) $y'' - 4y' - 5y = 0$ ii) $4y'' + 4y' + y = 0$ iii) $y'' - y' = 0$

Exercice 5 – EDL2 à coefficients constants avec second membre constant – *cf Exemple 3.9.*
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes. *(On cherchera la solution particulière grâce à la Proposition 3.6.)*

i) $y'' + 2y' - 8y = 5$ ii) $y'' - 2y' = 5$ iii) $4y'' = 3$

Exercice 6 – EDL2 à coefficients constants avec second membre – *cf Exemple 3.8.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les équations différentielles suivantes

$$(\mathrm{E}_\alpha) : \; y'' - 5y' + 4y = e^{\alpha t}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Pour cette question, $\alpha = 3$. Rechercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto ae^{3t}$ avec a une constante à déterminer. En déduire l'ensemble des solutions de (E_3).
3. Pour cette question, $\alpha = 4$. Rechercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto ate^{4t}$ avec a une constante à déterminer. En déduire l'ensemble des solutions de (E_4).

Exercice 7 – Problème de Cauchy – *cf Exemple 4.3.*
Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} y' - 4y = e^{4t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

(On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto (at + b)e^{4t}$ avec a, b deux constantes à déterminer.)

Exercice 8 – Problème de Cauchy – *cf Exemple 4.4.*
Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$(\mathrm{P}) : \begin{cases} y'' + 6y' + 9y = e^{-3t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

(On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto at^2e^{-3t}$ avec a une constante à déterminer.)

Exercice 9 – Un exemple d'équation différentielle non linéaire. On considère l'équation différentielle *non linéaire*

$$(\mathrm{E}): \quad y' = 2y(1-y)$$

1. Déterminer les trajectoires d'équilibre de (E).
2. Soit y une solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}$. On admet qu'elle ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ et on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z(t) = \frac{1}{y(t)}$$

   (a) Montrer que z est solution d'une équation différentielle (E') linéaire d'ordre 1 à coefficient constant et second membre constant à déterminer.
   (b) Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E).
4. Vers quel équilibre les trajectoires convergent-elles ?

Exercice 10 – Méthode de variations de la constante. On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$(\mathrm{E}): \quad y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Soit λ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{-t}$. Montrer que

$$f \text{ est une solution de (E)} \qquad \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lambda'(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$$

3. En déduire une solution particulière de (E).
4. Conclure sur l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 11 – Une équation fonctionnelle. L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)f(-x) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(0) = -4 \qquad (\star)$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les relations $(\star)$. On définit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x)f(-x).$$

   (a) Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$. *On pourra dériver la fonction g.*
   (b) En déduire une équation différentielle vérifiée par f.
   (c) Conclure sur les candidats-solutions.
2. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
3. Conclure.

Exercice 12 – EDL3 à coefficients constants homogène. On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 homogène suivante

$$(\mathrm{E}): \quad y''' - y'' - y' + y = 0$$

Procédons par analyse-synthèse.

1. **Analyse.** Soit f une solution de (E) et posons $g = f' - f$.
   (a) Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.
   (b) En déduire l'expression de g.
   (c) Calculer la dérivée de $h : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$.
   (d) En déduire l'expression de h.
   (e) Conclure sur les candidats-solutions.
2. **Synthèse.** Les candidats-solutions sont-elles bien des solutions du problème ?
3. Conclure.