30 Matrice d'une Application Linéaire

1 Noyau et image d'une matrice

1.1 Noyau d'une application linéaire

Définition 1.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **noyau** de A, noté $\ker(A)$, l'ensemble

$$\ker(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0_{n,1}\} \qquad \subset \mathbb{R}^n$$

Déterminer le noyau d'une matrice, tout comme déterminer le noyau d'une application linéaire, peut se ramener à la résolution d'un système linéaire homogène que l'on effectue, par exemple grâce au pivot de Gauss.

Exercice 1.2 Déterminer le noyau de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) &\iff AX = 0_{2,1} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 1.3 Déterminer le noyau de la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) &\iff AX = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1} \\
&\iff \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+4y+z \\ x+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & 5z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 & \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 & \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ & & & & y & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5z \\ y & = & z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Finalement, après la résolution du système grâce au pivot de Gauss, on obtient,

$$X \in \ker(A) \quad \Longleftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -5z \\ z \\ z \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad X = z\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Vérification.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

?

Pour trouver rapidement des éléments du noyau d'une matrice, il suffit de regarder si des combinaisons linéaires simples sur les colonnes de la matrice donne le vecteur nul. Attention, cette méthode ne permet pas de déterminer **tous** les éléments du noyau d'une matrice mais seulement de déterminer **un** élément de ce noyau. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

on peut remarquer directement que,

$$C_1 + C_2 = 0$$

où C_1 et C_2 désigne les deux colonnes de la matrice A. On obtient directement que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$$

Vérification.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.4 Trouver *rapidement* un élément du noyau pour chacune des matrices ci-dessous.

Matrice	C.L. sur les colonnes	Vecteur du noyau
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$C_1 + C_2 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A)$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$C_1 + C_2 - C_3 = 0$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$3 \cdot C_1 - 2 \cdot C_3 = 0$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker(A)$

1.2 Image et rang d'une matrice

Définition 1.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice A. On appelle **image** de A, noté $\mathrm{Im}(A)$, l'ensemble

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}((C_1, \ldots, C_n)) \qquad \subset \mathbb{R}^n$$

On appelle **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, la dimension de ce sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, autrement dit,

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

Le rang d'une matrice est donc le rang de la famille de ces colonnes. De plus, le rang d'une matrice est invariant par transposition, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = \mathrm{rg}({}^t\mathrm{M})$. Donc, le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille de ses lignes.

Exemple 1.6 Calculer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par définition,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Or,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc, en enlevant les vecteurs redondants, on remarque que,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_2}\right)$$

On peut remarquer que

- Par construction, la famille (u_1, u_2) est **génératrice** de $\mathrm{Im}(A)$.
- De plus, la famille (u_1, u_2) est **libre** car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Ainsi, la famille (u_1, u_2) est une **base** de $\mathrm{Im}(A)$ et donc

$$\mathrm{rg}(A) = 2$$

Exemple 1.7 Calculer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Par définition,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

On peut remarquer que

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Et donc, en enlevant le «vecteur de trop»

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=u_2}\right)$$

On peut remarquer que

- Par construction, la famille (u_1, u_2) est **génératrice** de $\mathrm{Im}(A)$.
- De plus, la famille (u_1, u_2) est **libre** car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Ainsi, la famille (u_1, u_2) est une **base** de $\mathrm{Im}(A)$ et donc

$$\mathrm{rg}(A) = 2$$

1.3 Lien entre noyau et image d'une application linéaire

Proposition 1.8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a,

$$n = \mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A))$$

Ce résultat permet de déduire plus rapidement l'image d'une matrice connaissant son noyau ou inversement.

Exercice 1.9 Pour la matrice A suivante, commencer par déterminer son noyau, puis déterminer *efficacement* son image,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Commençons par déterminer le **noyau** de A. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 8z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -3z \\ y & = & 2z \end{array} \right. \iff X = \begin{pmatrix} -3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$$

  (les calculs correspondant à la résolution du système ne sont pas indiqués ici). Donc,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  et donc (réaction abrégée) $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 1.
- Grâce au **théorème du rang**, on peut en déduire que

$$\mathrm{rg}(A) = 3 - 1 = 2$$

- Puis, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  est une famille d'éléments de $\mathrm{Im}(A)$, libre, qui contient autant d'éléments que la dimension de $\mathrm{Im}(A)$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(A)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice 1.10 Pour la matrice A suivante, commencer par déterminer son image, puis déterminer *efficacement* son noyau,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Commençons par déterminer l'**image** de A. Par définition,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  Or, on peut remarquer que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Et donc, en enlevant le «vecteur de trop»

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_2}\right)$$

  On peut remarquer que
  - Par construction, la famille (u_1, u_2) est **génératrice** de $\mathrm{Im}(A)$.
  - De plus, la famille (u_1, u_2) est **libre** car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

  Ainsi, la famille (u_1, u_2) est une **base** de $\mathrm{Im}(A)$ et donc

$$\mathrm{rg}(A) = 2$$

- Grâce au théorème du rang, on peut en déduire que

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1$$

- Comme on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  est une famille d'éléments de $\ker(A)$, libre, qui contient autant d'éléments que la dimension de $\ker(A)$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(A)$. Ainsi,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

1.4 Lien avec l'inversibilité

Définition 1.11 — Rappel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est dite **inversible** lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ (et alors $AB = BA = I_n$).

Proposition 1.12 — Rappel.

- **Cas des matrices** 2×2**.** On sait que

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) = ad - bc \neq 0.$$

  Et dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- **Cas des matrices diagonales.** On sait que,

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], a_i \neq 0.$$

  Dans ce cas,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

- **Cas des matrices triangulaires.** Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls (attention, dans ce cas, on ne connaît pas la forme de l'inverse).

Exercice 1.13 Déterminer l'inversibilité des trois matrices suivantes, et le cas échéant donner leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- La matrice A est une matrice **de taille** 2×2. De plus,

$$\det(A) = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5 \neq 0.$$

  Donc A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- La matrice B est **diagonale**, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible et son inverse est donné par

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice C est **triangulaire inférieure** et un de ses coefficients diagonaux est nul, donc la matrice n'est pas inversible.

Proposition 1.14 — Rappel. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$A \text{ est } \underline{\text{inversible}} \iff \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ l'équation } AX = B \text{ admet une } \underline{\text{unique}} \text{ solution}$$

Dans ce cas, la solution du système est

$$X = A^{-1}B$$

Exemple 1.15 On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Soient

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
AX = B \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & a \\ x & + & y & & & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & b \\ & & y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_1 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & b \\ & & y & + & z & = & a \\ & & & & z & = & c-b \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -a+c \\ y & = & a+b-c \\ z & = & -b+c \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} -a+c \\ a+b-c \\ -b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \checkmark$$

Proposition 1.16 Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ Si $n = p$ alors

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = n \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ inversible}$$

Cette proposition permet souvent de montrer plus efficacement qu'une matrice est inversible mais ne permet pas de déduire l'inverse lorsqu'il existe.

Exemple 1.17 On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer si la matrice A est inversible.

On a,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

car

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

«Donc» (rédaction abrégée), le rang de A vaut 2. Donc A n'est pas inversible.

Exemple 1.18 On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible.

On a,

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=u_3}\right)$$

Or, la famille (u_1, u_2, u_3) est génératrice de $\mathrm{Im}(A)$ par construction et libre (à détailler...). Donc, c'est une base de $\mathrm{Im}(A)$. Donc, le rang de A vaut 3. Donc A est inversible.

2 Matrice d'une application linéaire

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et l'application linéaire $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = (2x+3y, -4x+5y, 3x+7y).$$

On peut remarquer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ -4x+5y \\ 3x+7y \end{pmatrix}$$

On peut aussi remarquer que

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On dit que f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

2.1 Représentation matricielle d'une application linéaire

Proposition 2.1 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors il existe une unique matrice $M = \mathrm{Mat}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, appelée **matrice canoniquement associée à l'application** f, telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \qquad f(u) = Mu$$

Une autre manière de construire la matrice canoniquement associée à une application linéaire est de dire que ces colonnes sont obtenues en calculant l'image des vecteurs de la base canonique de l'espace de départ (d'où le vocabulaire «canoniquement associé à»).

Application Linéaire	Matrice canoniquement associée
$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \\ 2x+y+z \end{pmatrix} \end{array}$	$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ y-z \end{pmatrix} \end{array}$	$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$	$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.2 Correspondance entre les applications linéaires et les matrices

a) Au niveau des opérations

Dans le monde des Applications Linéaires	Dans le monde des Matrices
$h = \lambda f + \mu g$	$\mathrm{Mat}(h) = \lambda \mathrm{Mat}(f) + \mu \mathrm{Mat}(g)$
$h = f \circ g$	$\mathrm{Mat}(h) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g)$
$h = f \circ \cdots \circ f = f^n$	$\mathrm{Mat}(h) = \mathrm{Mat}(f) \times \cdots \times \mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}(f)^n$
f bijective	$\mathrm{Mat}(f)$ inversible
$h = f^{-1}$ (bijection réciproque) *si existence*	$\mathrm{Mat}(h) = \mathrm{Mat}(f)^{-1}$ (matrice inverse) *si existence*

Exercice 2.2

1. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

La matrice A est de taille 2×2. On étudie donc son inversibilité grâce à son déterminant qui vaut

$$\det(A) = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$$

Comme $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérification.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

2. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (2x+y, x+y)$$

Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

On veut prouver que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \exists! (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = (a,b) ?$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a,

$$f(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} 2x + y = a \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = a - b \\ y = -a + 2b \end{cases}$$

Ceci prouve l'assertion de départ. Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ f^{-1}(a,b) = (a-b, -a+2b)$$

3. Quelle propriété illustre cet exemple ?

   On remarque que A est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire f et que A^{-1} est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire f^{-1}. Cela illustre le fait que

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}(f)^{-1}$$

Exercice 2.3

1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Calculer le produit AB.

   En effectuant le produit matriciel, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 11 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. On considère les applications linéaires f et g, données par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x-y+z, 2x+y+3z, -x+2y+z)$$
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad g(x,y,z) = (2x-y-z, x+y+z, 2x-2y+z)$$

   Calculer $f \circ g$.

   Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a,

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x,y,z) &= f(g(x,y,z)) \\ &= f(\underbrace{2x-y-z}_{=X}, \underbrace{x+y+z}_{=Y}, \underbrace{2x-2y+z}_{=Z}) \\ &= (X-Y+Z, 2X+Y+3Z, -X+2Y+Z) \\ &= (2x-y-z-(x+y+z)+2x-2y+z, 2(2x-y-z)+x+y+z+3(2x-2y+z), \\ &\quad -(2x-y-z)+2(x+y+z)+2x-2y+z) \\ &= (3x-4y-z, 11x-7y+2z, 2x+y+4z)\end{aligned}$$

3. Quelle propriété illustre cet exemple ?

   On remarque que A est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire f, que B est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire g et que AB est la matrice canoniquement associée à l'application linéaire $f \circ g$. Cela illustre donc le fait que,

$$\mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g)$$

b) Noyau, Image, Rang

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $\mathrm{M} = \mathrm{Mat}(f) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sa matrice canoniquement associée. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice M.

Dans le monde des Applications Linéaires	Dans le monde des Matrices	Correspondance
$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}\}$	$\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{M}x = 0_{\mathbb{R}^p}\}$	$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$
$\mathrm{Im}(f) = \{v \in \mathbb{R}^p \mid \exists u \in \mathbb{R}^n,\ v = f(u)\}$	$\mathrm{Im}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$	$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\mathrm{M})$
$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$	$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$	$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{M})$

Ainsi, pour étudier les propriétés d'une application linéaire (noyau, image, injectivité, surjectivité), on peut le faire directement ou passer «dans le monde des matrices» et étudier toutes ces propriétés là au niveau de l'application canoniquement associée à l'application linéaire.

Exemple 2.4 On considère l'application linéaire suivante.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x-3y+z, y+5z, 5z) \end{array}$$

Déterminer le rang et le noyau cette application linéaire. Est-elle injective ? surjective ? bijective ?

«Passons dans le monde des matrices» et étudier ces propriétés en étudiant la matrice canoniquement associée à f est qui donnée par

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Le rang de M est donné par

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = \dim(F) \qquad \text{où} \qquad F = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=u_3} \right)$$

Or,
- Par construction, (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de F.
- Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\lambda_1 & -3 & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 5\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 5\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Donc, la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F. Donc, le rang de M est 3

- Donc, grâce au théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(\text{M})) = 3 - \text{rg}(M) = 3 - 3 = 0$$

et donc,

$$\text{Ker}(\text{M}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Donc M est inversible (car la matrice est carrée). Donc l'application f est bijective (et donc injective et surjective) de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$.