

TD 05 – ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE FONCTION

Exercice 1 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+3}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{2x+1}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+3}$
5. $f_5 : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{3}x-5\right)$
6. $f_6 : x \mapsto \ln(x+3) - \ln(2x+1)$
7. $f_7 : x \mapsto x^{\frac{1}{7}}$
8. $f_8 : x \mapsto \exp(3x+2)$

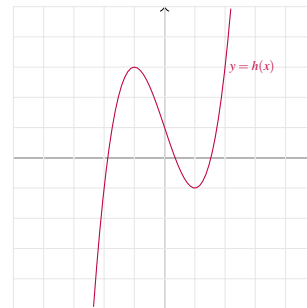
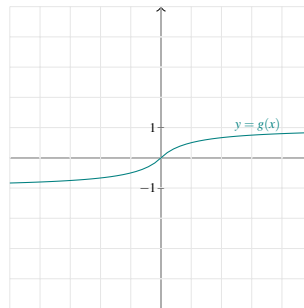
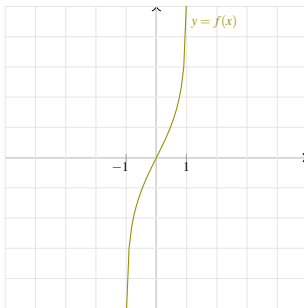
Exercice 2 – Domaine de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{4-x^2}$
2. $f_2 : x \mapsto e^x \ln(2x+3)$
3. $f_3 : x \mapsto \ln(e^x - 1)$
4. $f_4 : x \mapsto \ln(\ln(x))$

Exercice 3 – Composition de fonctions. Déterminer, lorsque cela est possible, $f \circ g$ et $g \circ f$ (on donnera, quand c'est possible, l'ensemble de définition et l'expression de la composée).

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^3$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x-1$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$
3. $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - 1$

Exercice 4 – Représentation graphique. Pour les fonctions suivantes, à partir du graphe, donner : le domaine de définition, la parité, la monotonie, les éventuels minorants, majorants et extrema.



Exercice 5 – Parité/imparité. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On définit les trois fonctions suivantes, f_1 , f_2 et f_3

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^4 + 1} \qquad f_2 : x \mapsto e^{x^2} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$$

Montrer que f_1 est impaire, f_2 est paire (sur leurs ensembles de définition respectifs) et f_3 est ni paire, ni impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer la parité des fonctions suivantes (en précisant au préalable leur ensemble de définition).

$$f_4 : x \mapsto e^x - e^{-x}, \qquad f_5 : x \mapsto x^2 \ln(x), \qquad f_6 : x \mapsto x^3 + \frac{1}{x}.$$

3. Que dire (en terme de parité) de la somme de deux fonctions paires ? De la somme de deux fonctions impaires ? De la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
4. Démontrer qu'une fonction polynomiale de degré 2 admettant deux racines qui sont opposées est paire.

Exercice 6 – Monotonie et inégalités. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Montrer que pour tout $x \in [1, 3[$, on a

$$-2 \leq -\frac{2}{x^2} \leq -\frac{2}{9}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in [-3, 2]$, on a

$$\frac{1}{6} \leq \frac{3}{(x-1)^2+2} \leq \frac{3}{2}.$$

3. Montrer que pour tout $u \in [1, 4]$, on a

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leq 1.$$

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $2 \leq a \leq 3$ et $1 \leq b \leq 2$. Montrer que l'on a

$$2 \leq a^2 - \frac{2}{b} \leq 8.$$

Exercice 7 – Étude complète d'une fonction. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 - 3x + 1 \end{aligned}$$

1. Dresser le tableau de variations de f . *On admet que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Tracer l'allure la courbe représentative de la fonction f .
 3. La fonction f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, préciser sa valeur et le ou les valeurs en le(s)quel(s) il est atteint.
 4. La fonction f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

Exercice 8 – ECRICOME ECE 2023. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{2x} f(x).$$

2. Dresser le tableau de variations de f . *On admet que*

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en faisant apparaître la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
 4. La fonction admet-elle un minimum ? un maximum ?

Exercice 9 – EMLYON Maths E 2024. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Dresser le tableau de variations de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et 0 . *On admettra que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.
 3. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.