TD 30 – MATRICES & APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Noyau, image & rang d'une matrice

Exercice 1 – Noyau. Déterminer le noyau des matrices suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} & \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 2 – Trouver un élément du noyau rapidement. Déterminer pour chaque matrice ci-dessous un élément du noyau.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} & \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} & \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 3 – Image & Rang. Déterminer l'image et le rang des matrices suivantes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \text{e) } A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{f) } A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 4 – Quel est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rang de I_n la matrice identité d'ordre n ? *On pourra commencer par regarder le cas $n = 2$, $n = 3$,...*

Exercice 5 – Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en fonction du paramètre α .

Exercice 6 – Inversibilité d'une matrice. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles grâce à la méthode de votre choix (on ne demande pas de donner l'inverse).

$$\begin{array}{lll} \text{a) } A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{b) } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{c) } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{e) } A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{f) } A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{g) } A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{h) } A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} & \text{i) } A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 7 – Manipulation abstraite du noyau et de l'image. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ telle que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.
2. En déduire que $\dim(\ker(f)) = 2$.

2 Matrice d’une application linéaire

Exercice 8 – Matrice canoniquement associée. Déterminer la matrice canoniquement associée à chacune des applications linéaires suivantes.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{b) } g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y) \longmapsto (x+y, 2x+y) & (x, y) \longmapsto (x-y, x+y, x-3y) \\
 \\
 \text{c) } h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \text{d) } h: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (x, y, z) \longmapsto (x+y, y+z, z+x) & (x, y, z, t) \longmapsto (0, t+y, x-z)
 \end{array}$$

Exercice 9 – Lien entre les opérations. Soient s et t les deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définis par,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, s(x, y) = (2x - 5y, -3x + 4y) \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, t(x, y) = (-8y, 7x + y)$$

- Déterminer les matrices S et T canoniquement associées aux applications s et t .
- Déterminer les applications linéaires $s+t$, $s \circ t$, $t \circ s$ et $s \circ s$.
- Déterminer les matrices canoniquement associées aux applications linéaires $s+t$, $s \circ t$, $t \circ s$ et $s \circ s$.

Exercice 10 – Lien matrices & Applications Linéaires. Soit f l’application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$\begin{array}{ll}
 f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 & \\
 (x, y, z, t) \longmapsto (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t) &
 \end{array}$$

- Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
- Écrire la matrice A représentant l’application f dans cette base.
- Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont des combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
- En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
- Quelle est la dimension du noyau de f ?
- Montrer que la famille de vecteurs (u, v) forme une base de $\ker(f)$ où

$$u = (-2, -1, 1, 0) \quad \text{et} \quad v = (-1, -1, 0, 1)$$

Exercice 11 – Lien matrices & Applications Linéaires. Soit f l’application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{array}{ll}
 f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \\
 (x, y, z, t) \longmapsto (x-y+z, x+2y-z+t, x-4y+3z-t) &
 \end{array}$$

- Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
- Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$.
- En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$.
- En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
- L’application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
- Donner la matrice A canoniquement associée à l’application f .
- Quel est le rang de A ? La matrice A est-elle inversible ?