TD 30 – Matrices & App. Lin. (Réponses)

1 Noyau, image & rang d'une matrice

Exercice 1 – Noyau. Déterminer le noyau des matrices suivantes.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) $\mathrm{Ker}(A_1) = \mathrm{Vect}((1,1))$

b) $\mathrm{Ker}(A_2) = \{(0,0,0)\}$

c) $\mathrm{Ker}(A_3) = \mathrm{Vect}((2,-3,1))$

d) $\mathrm{Ker}(A_4) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$

Exercice 2 – Trouver un élément du noyau rapidement. Déterminer pour chaque matrice ci-dessous *un* élément du noyau.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

a) On remarque que $C_1 + C_2 = 0$ donc $(1,1) \in \mathrm{Ker}(A_1)$

b) On remarque que $C_1 + C_2 = C_3$ donc $(1,1,-1) \in \mathrm{Ker}(A_2)$

c) On remarque que $2C_1 - C_2 = C_3$ donc $(2,-1,-1) \in \mathrm{Ker}(A_3)$

Exercice 3 – Image & Rang. Déterminer l'image et le rang des matrices suivantes.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

a) $\mathrm{rang}(A_1) = 1$

b) $\mathrm{rang}(A_2) = 2$

c) $\mathrm{rang}(A_3) = 1$

d) $\mathrm{rang}(A_4) = 2$

e) $\mathrm{rang}(A_5) = 3$

f) $\mathrm{rang}(A_6) = 1$

Exercice 4 – Quel est, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rang de I_n la matrice identité d'ordre n ? *On pourra commencer par regarder le cas $n = 2$, $n = 3$,...*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{rang}(I_n) = n$

Exercice 5 – Déterminer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en fonction du paramètre α.

On a,

$$\operatorname{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 2 & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Exercice 6 – Inversibilité d'une matrice. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles grâce à la méthode de votre choix (on ne demande pas de donner l'inverse).

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ h) $A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ i) $A_9 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a) A_1 non inversible b) A_2 inversible c) A_3 non inversible

d) A_4 inversible e) A_5 non inversible f) A_6 inversible

g) A_7 non inversible h) A_8 inversible i) A_9 non inversible

Exercice 7 – Manipulation abstraite du noyau et de l'image. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ telle que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$.
2. En déduire que $\dim(\ker(f)) = 2$.

2 Matrice d'une application linéaire

Exercice 8 – Matrice canoniquement associée. Déterminer la matrice canoniquement associée à chacune des applications linéaires suivantes.

a) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 2x+y) \end{array}$ b) $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+y, x-3y) \end{array}$

c) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, y+z, z+x) \end{array}$ d) $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (0, t+y, x-z) \end{array}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$