DS 6 (Concours Blanc 2)

Toutes les pages de la copie doivent être numérotées par le candidat.

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé. Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communicants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes - mais brèves - de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1 – BCE 2019, Maths T. Dans cet exercice, on suppose que l'on dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules rouges tandis que l'urne U_2 contient deux boules rouges et deux boules blanches. On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne U_1. Dans le cas contraire on choisit de faire les tirages dans l'urne U_2. On note F l'évènement «la pièce amène face». L'évènement «la pièce amène pile» est donc $\overline{F}$. On définit également pour tout entier $k \geqslant 1$, l'évènement R_k : «le k-ième tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge».

1. Compléter la fonction suivante en `Python`, afin qu'elle simule le choix d'une urne, parmi l'urne 1 ou 2.

```python
import numpy.random as rd
def choix_urne():
    ....................
```

2. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **un** tirage dans l'urne choisie. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{3}{4}$. *On pourra s'aider d'un arbre de probabilité mais celui-ci ne doit pas remplacer un raisonnement rigoureux.*
3. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **deux** tirages dans l'urne choisie *sans remise*, c'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.
   (a) Calculer $\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2)$ et $\mathbb{P}_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$.
   (b) En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\frac{7}{12}$.
   (c) On remarque à postériori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?
4. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **des** tirages *sans remise* dans l'urne choisie **jusqu'à** ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
   (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\{1, 2, 3\}$.
   (b) Expliquer pourquoi $[Y = 1] = F \cap \overline{R_1}$. En déduire $\mathbb{P}(Y = 1)$.
   (c) Calculer de même $\mathbb{P}(Y = 2)$.
   (d) Déduire alors des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}(Y = 3)$.
   (e) Justifier que Y admette une espérance et la calculer.

Exercice 2 – Adapté du sujet ECRICOME 2020, Maths E. Pour a un réel, on considère le sous-espace vectoriel F_a de $\mathbb{R}^3$ donné par,

$$F_a = \text{Vect}(u_a, v_a, w_a) \qquad \text{avec} \qquad u_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_a = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}, \; w_a = \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer la dimension de F_a en fonction de la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner, pour tout $a \in \mathbb{R}$, une famille génératrice du sous-espace vectoriel F_a.

Partie A : Étude du cas où $a = 0$.

2. Montrer que la famille (u_0, v_0, w_0) n'est pas libre dans $\mathbb{R}^3$.
3. En déduire la dimension de F_0.

Partie B : Étude du cas où $a = 1$.

4. Montrer que la famille (u_1, v_1, w_1) est libre dans $\mathbb{R}^3$.
5. En déduire la dimension de F_1.

Partie C : Étude du cas où $a \neq 0$.

Dans cette partie, on considère les vecteurs u, v, w de $\mathbb{R}^3$ donnés par,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$, donné par

$$F = \text{Vect}(u, v, w)$$

6. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les trois égalités suivantes sont vraies :

$$u_a + v_a + w_a = a \cdot u \tag{1}$$
$$u_a + w_a = v \tag{2}$$
$$u_a + v_a = a \cdot v + w \tag{3}$$

7. En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $F \subset F_a$.
8. Quelle est la dimension de F ?
9. En déduire, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la dimension de F_a. Ce résultat est-il en accord avec le cas particulier $a = 1$ vu à la Partie B ?

Exercice 3 – EDHEC 2020, Maths E. On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$$

2. (a) Calculer I_0.
   (b) Calculer I_1 à l'aide du changement de variables «t=1+x».
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2} = x^n$$

(b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$

(c) En déduire la valeur I_2.

(d) En utilisant la relation de la Question 3b, compléter la fonction Python suivante pour que, prenant en argument un entier naturel `n`, elle renvoie la valeur de I_n.

```
import numpy as np

def Integrale_I(n):
    a = 1/2
    b = np.log(2) - 1/2
    for k in range(......):
        aux = ...
        a = ...
        b = ...
    return b
```

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

(b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = n \times J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

6. (a) Calculer J_0.

(b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

(c) En déduire la valeur de J_1.

(d) En utilisant la relation de la Question 6b, écrire une fonction en `Python`, appelée `Integrale_J`, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la valeur de J_n.

7. Déduire des questions précédentes que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

8. (a) <u>Simulation informatique.</u>

i. Écrire une fonction en `Python`, appelée `somme`, qui prend en argument un entier naturel non nul `n` et qui renvoie la valeur de

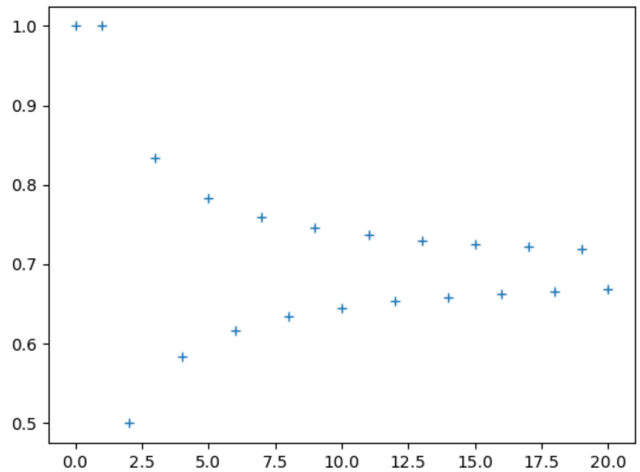
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

ii. Compléter le programme suivant afin qu'une fois exécuté, Python représente dans le plan les 20 premiers termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

abscisses = .........
ordonnees =  .........
plt.plot(abscisses,ordonnees,'+')
plt.show()
```

iii. Le programme de la question précédente renvoie :



Que peut-on alors conjecturer sur la convergence de la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad ?$$

(b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

(c) En déduire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et donner la valeur de sa somme.

Exercice 4 – ECRICOME 2014, Maths E. Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p. On procède à l'expérience suivante : « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ». On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'évènement : «la pièce donne FACE lors du j-ième lancer» ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre :

« FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE »

alors $Y = 4$.

1. Simulation informatique.

(a) Écrire une fonction en `Python`, appelée `lancer`, qui prend en argument un réel `p` compris entre 0 et 1, qui créé un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0,1]$ et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à p et 0 sinon. *On admet que cette fonction permet de simuler un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile vaut p (le résultat* 1 *correspondant à l'obtention de Pile et* 0 *à Face.)*

(b) Compléter la fonction suivante en Python, qui prend en argument un réel p, qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier pile et renvoie le nombre de lancers effectués. *On pourra utiliser la fonction `lancer` en la répétant convenablement.*

```python
def premier_pile(p):
    x = lancer(p)
    c = 1
    while ........... :
        x = ...........
        c = ...........
    return(c)
```

(c) Écrire une fonction en Python, appelée second_pile, qui prend en argument un réel p, qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second pile et renvoie le nombre de faces obtenus en tout. *On pourra utiliser la fonction `premier_pile` en la répétant convenablement.*

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n. Préciser alors la valeur de son espérance $\mathbb{E}(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.
3. Déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y.
4. Donner la valeur des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(Y = 0), \qquad \mathbb{P}(Y = 1), \qquad \mathbb{P}(Y = 2)$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que les évènements

$$[Y = n] \qquad \text{et} \qquad (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$$

sont égaux.

6. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(Y = n) = (n+1)p^2q^n$$

7. Vérifier par le calcul que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1$$

8. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et donner sa valeur.
9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.