DS Concours Blanc 2 (Correction)

Exercice 1 – BCE 2019, Maths T.

Cet exercice est adapté du sujet d'épreuves communes 2019, Maths T (l'énoncé du CB2 est fidèle mot pour mot à l'énoncé de base avec seulement une indication rajoutée à la question 1). Cet exercice, dans le sujet initial, comptait pour 16% de la note finale. Voici un extrait du rapport de jury concernant ce sujet de concours.

> « *De façon générale, on trouve beaucoup d'écritures incorrectes à base d'intersections ou de réunions de probabilités, d'égalités entre probabilités et événements. Les erreurs de calculs sur les fractions sont très nombreuses.* »
>
> « *Les résultats intermédiaires étant souvent donnés, les tentatives d'escroquerie pour les obtenir à tout prix sont nombreuses. Elles sont bien sûr sanctionnées par les correcteurs.* »
>
> « *Les calculs de deux questions successives peuvent aussi être incohérents sans que le candidat ne s'en émeuve. De même il n'est pas rare de rencontrer des candidats qui trouvent des probabilités supérieures à 1 voire négatives !* »

Dans cet exercice, on suppose que l'on dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 4 boules rouges tandis que l'urne U_2 contient deux boules rouges et deux boules blanches.

On commence par lancer une pièce non truquée. Si l'on obtient "pile" on choisit de faire une succession de tirages dans l'urne U_1. Dans le cas contraire on choisir de faire les tirages dans l'urne U_2.

On note F l'évènement «la pièce amène face». L'évènement «la pièce amène pile» est donc $\overline{F}$. On définit également pour tout entier $k \geqslant 1$, l'évènement R_k : «le k-ième tirage dans l'urne choisie amène une boule rouge».

1. Compléter la fonction suivante en `Python`, afin qu'elle simule le choix d'une urne, parmi l'urne 1 ou 2.

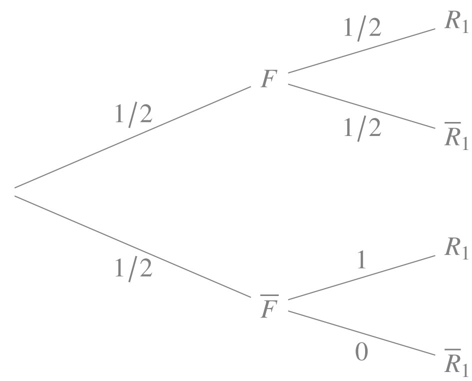
```python
import numpy.random as rd

def choix_urne():
    #Choix uniforme d'une nombre entre 1 et 2
    #(Choix du numero de l'urne)
    return(rd.randint(1,3))
```

2. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **un** tirage. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{3}{4}$. *On pourra s'aider d'un arbre de probabilité mais celui-ci ne doit pas remplacer un raisonnement complet et rigoureux.*

> « *Le système complet d'événements est rarement cité dans la question 1.* »

On peut représenter cette situation sur un arbre de probabilités à deux niveaux, dont le premier niveau concerne le lancer de pièce (on obtient pile ou face) et le deuxième niveau concerne le tirage d'une boule dans une urne (on obtient une boule rouge ou une boule pas rouge), sachant que le choix de l'urne est déterminé par le résultat du lancer de pièce à la première étape.



Les probabilités sur l'arbre s'expliquent de la manière suivante :

- La pièce n'est pas truquée : les résultats «pile» et «face» sont donc équiprobables d'où :
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(\overline{F}) = \frac{1}{2}$$
- Si l'évènement F est réalisé (c'est-à-dire si on a obtenu Face au premier lancer, le tirage se fait dans l'urne 2 contenant 2 boules rouges et deux blanches. Les boules étant indiscernables, on obtient,
$$\mathbb{P}_F(R_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
- De même,
$$\mathbb{P}_{\overline{F}}(R_1) = \frac{4}{4} = 1$$

On cherche à déterminer $\mathbb{P}(R_1)$. Le système $(F, \overline{F})$ forme un système complet d'évènements. Donc, par la **formule de probabilités totales**, on obtient,

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{P}(R_1)} &= \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(R_1) + \mathbb{P}(\overline{F}) \times \mathbb{P}_{\overline{F}}(R_1)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1\\ &\boxed{= \frac{3}{4}}\end{aligned}$$

3. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **deux** tirages *sans remise*, c'est-à-dire que la boule tirée lors du premier tirage n'est pas remise dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage dans la même urne.
   (a) Calculer
$$\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$$

   Si l'évènement $\overline{F}$ est réalisé (c'est-à-dire que l'on a obtenu Pile au lancer de pièce), on effectue les deux tirages sans remise dans l'urne 1 ne contenant que des boules rouges. Ainsi,
$$\boxed{\mathbb{P}_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2) = 1}$$

   Si l'évènement F est réalisé (c'est-à-dire que l'on a obtenu Face au lancer de pièce), on effectue les deux tirages sans remise dans l'urne 1 contenant deux boules rouges parmi quatre boules. Ainsi, en utilisant la **formule des probabilités composées**, on obtient
$$\boxed{\mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2)} = \mathbb{P}_F(R_1) \times \mathbb{P}_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \boxed{= \frac{1}{6}}$$

(b) En déduire que la probabilité que le tirage amène deux boules rouges de suite est $\frac{7}{12}$.

« De très nombreux candidats confondent probabilité conditionnelle et probabilité d'intersection. »

On cherche à déterminer $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)$. Le système $(F, \overline{F})$ forme un système complet d'évènements. Donc, par la **formule de probabilités totales**, on obtient,

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(\overline{F}) \times \mathbb{P}_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)$$

En utilisant les résultats de la question 3a, on obtient alors,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 \boxed{= \frac{7}{12}}$$

(c) On remarque à postériori que les deux boules tirées sont rouges. Quelle est la probabilité que la pièce ait amené pile ?

On cherche à déterminer $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(\overline{F})$. D'après la **formule de Bayes**,

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(\overline{F}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{F}) \times \mathbb{P}_{\overline{F}}(R_1 \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}$$

En utilisant les résultats des questions 3a et 3b, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(\overline{F})} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} \boxed{= \frac{6}{7}}$$

4. Dans cette question, on lance la pièce, on choisit l'urne (selon le procédé donné en introduction) puis on effectue **des** tirages *sans remise* dans l'urne **jusqu'à** ce que l'on soit en mesure de déterminer avec certitude dans quelle urne l'on se trouve. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

(a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\{1, 2, 3\}$.

- Si la première boule tirée est blanche, on sait que l'on est dans l'urne 2 (car l'urne 1 ne contient pas de boule blanche). Dans ce cas, $Y = 1$ car il n'aura fallu qu'un seul tirage pour déterminer dans quelle urne on est.
- Si la première boule tirée est rouge et la deuxième blanche, on sait que l'on est dans l'urne 2 (car l'urne 1 ne contient pas de boule blanche). Dans ce cas, $Y = 2$ car il aura fallu deux tirages pour déterminer dans quelle urne on est.
- Si les deux premières boules tirées sont rouges et la troisième est blanche, de même $Y = 3$ (et on est dans l'urne 2).
- Si les deux premières boules tirées sont rouges et la troisième est rouge, alors on est dans l'urne 1 (car l'urne 2 ne contient que deux boules rouges et le tirage se fait sans remise, on ne peut donc pas tirer trois boules rouges de suite) et alors $Y = 3$.

On arrive donc à déterminer au bout de trois tirages maximum dans quelle urne on est (et dans certains cas, on peut le savoir plus tôt). Ainsi,

$$\boxed{Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}.}$$

(b) Expliquer pourquoi $[Y = 1] = F \cap B_1$. En déduire $\mathbb{P}(Y = 1)$.

« La justification de l'égalité $[Y = 1] = F \cap B_1$ est rarement convaincante. »

L'évènement $Y = 1$ signifie que l'on arrive à déterminer dans quelle urne on est avec seulement un tirage.

- Si la première boule est rouge, on ne sait pas dans quelle urne on est.
- Si la première boule est blanche, on sait que l'on est dans l'urne 2 et donc que l'on avait obtenu pile au lancer de pièce préalable.

Donc, la seule manière de savoir dans quelle urne on est avec seulement un seul tirage est d'avoir eu pile au lancer de pièce puis d'avoir tirer une boule blanche d'où

$$\boxed{[Y = 1] = F \cap B_1}$$

Ainsi, par la **formule des probabilités composées**, on a,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 1)} = \mathbb{P}(F \cap B_1) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \boxed{= \frac{1}{4}}$$

(c) Calculer de même $\mathbb{P}(Y = 2)$.

En reprenant les explications données à la question 4a, on peut montrer que

$$\boxed{[Y = 2] = F \cap \overline{B_1} \cap B_2}$$

Donc, en utilisant de nouveau la **formule des probabilités composées**, on a,

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{P}(Y = 2)} &= \mathbb{P}(F \cap \overline{B_1} \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}_F(\overline{B}_1) \times \mathbb{P}_{F \cap \overline{B}_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \\ &\boxed{= \frac{1}{6}}\end{aligned}$$

(d) Déduire alors des questions précédentes la valeur de $\mathbb{P}(Y = 3)$.

Comme $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ (cf question 4a), on sait que

$$\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) = 1$$

Donc, en utilisant les résultats des questions 4b et 4c, on en déduit que,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 3)} = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \boxed{= \frac{7}{12}}$$

(e) Justifier que Y admette une espérance et la calculer.

La variable aléatoire Y est une variable aléatoire **finie**. Elle admet donc une espérance donnée par,

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{E}(Y)} &= \sum_{k=1}^{3} k \times \mathbb{P}(Y = k) \\ &= 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \times \mathbb{P}(Y = 2) + 3 \times \mathbb{P}(Y = 3) \\ &= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} \\ &\boxed{= \frac{7}{3}}\end{aligned}$$

Exercice 2 – Adapté du sujet ECRICOME 2020, Maths E.

« Cet exercice est inspiré du sujet ECRICOME *2020, Maths E. Néanmoins, l'énoncé du CB2 est assez éloigné de l'énoncé de base, pour pouvoir être traités avec les outils au programme de la première année. »*

Pour un a un réel, on considère le sous-espace vectoriel F_a de $\mathbb{R}^3$ donné par,

$$F_a = \mathrm{Vect}(u_a, v_a, w_a) \qquad \text{avec} \qquad u_a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_a = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}, \ w_a = \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer la dimension de F_a.

1. Donner, pour tout $a \in \mathbb{R}$, une famille génératrice du sous-espace vectoriel F_a.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme

$$F_a = \mathrm{Vect}(u_a, v_a, w_a)$$

par construction, cela signifie que $\boxed{\text{la famille } (u_a, v_a, w_a) \text{ est une famille génératrice de } F_a}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 0$.

2. Montrer que la famille (u_0, v_0, w_0) n'est pas libre dans $\mathbb{R}^3$.

Tout d'abord, on a,

$$u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ w_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut directement remarquer que,

$$\boxed{u_0 = -v_0 - w_0}$$

c'est-à-dire u_0 est une combinaison linéaire des vecteurs v_0 et w_0.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (u_0, v_0, w_0) \text{ n'est pas libre.}}$

3. En déduire la dimension de F_0.

D'après la question précédente,

$$u_0 = -v_0 - w_0$$

Ainsi,

$$F_0 = \mathrm{Vect}(u_0, v_0, w_0) = \mathrm{Vect}(v_0, w_0).$$

- La famille (v_0, w_0) est donc par construction aussi une famille **génératrice** de F_0.
- La famille (v_0, w_0) est une famille **libre** (dans $\mathbb{R}^3$) car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires : il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w_0 = \lambda w_0$.

Ainsi, (v_0, w_0) est une **base** de F_0. Ainsi,

$$\boxed{\dim(F_0)} = \mathrm{card}((v_0, w_0)) \boxed{= 2}$$

Partie B : Étude du cas où $a = 1$.

4. Montrer que la famille (u_1, v_1, w_1) est libre dans $\mathbb{R}^3$.

Tout d'abord, on a,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que la famille (u_1, v_1, w_1) est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot v_1 + \lambda_3 \cdot w_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot v_1 + \lambda_3 \cdot w_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \\
\text{donc} \quad & \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{donc} \quad & \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \\
\text{donc} \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 0
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (u_1, v_1, w_1) \text{ est libre}}$.

5. En déduire la dimension de F_1.

- La famille (u_1, v_1, w_1) est par construction une famille **génératrice** de F_1 (cf Question 1).
- La famille (u_1, v_1, w_1) est une famille **libre** (dans $\mathbb{R}^3$) (cf Question 4).

Ainsi, (u_1, v_1, w_1) est une **base** de F_1. Ainsi,

$$\boxed{\dim(F_1)} = \text{card}((u_1, v_1, w_1)) \boxed{= 3}$$

Partie C : Étude du cas où $a \neq 0$.

Dans cette partie, on considère les vecteurs u, v, w de $\mathbb{R}^3$ donnés par,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$, donné par

$$F = \text{Vect}(u, v, w)$$

6. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les trois égalités suivantes sont vraies :

$$u_a + v_a + w_a = a \cdot u \tag{1}$$
$$u_a + w_a = v \tag{2}$$
$$u_a + v_a = a \cdot v + w \tag{3}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, on a,

$$\boxed{u_a + v_a + w_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{= a \cdot u}$$

De même, on a,

$$\boxed{u_a + w_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxed{= v}$$

Enfin,

$$\boxed{u_a + v_a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{= a \cdot v + w}$$

7. En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $F \subset F_a$.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

- D'après l'égalité (1) de la question 6, on obtient (car $a \neq 0$),

$$u = \frac{1}{a}(u_a + v_a + w_a)$$

  Donc, u est une combinaison linéaire de u_a, v_a et w_a. D'où $u \in F_a$.
- De même, l'égalité (2) de la question 6 permet de montrer que $v \in F_a$.
- En combinant les égalités (2) et (3) de la question 6, on obtient,

$$w = u_a + v_a - a(u_a + w_a) = (1-a) \cdot u_a + v_a - a \cdot w_a$$

  et donc, $w \in F_a$.

Comme les vecteurs u, v et w sont dans F_a, par stabilité par combinaison linéaire,

$$\mathrm{Vect}(u, v, w) \subset F_a$$

c'est-à-dire

$$\boxed{F \subset F_a.}$$

8. Quelle est la dimension de F ?

Par construction, la famille (u, v, w) est une famille génératrice de F. On peut montrer comme à la question 4 que la famille (u, v, w) est libre (dans $\mathbb{R}^3$). Ainsi, la famille (u, v, w) est une base de F. Ainsi,

$$\boxed{\dim(F)} = \mathrm{card}((u, v, w)) \boxed{= 3}$$

9. En déduire, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la dimension de F_a. Ce résultat est-il en accord avec le cas particulier $a = 1$ vu à la Partie B ?

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. En utilisant la question 7, on obtient

$$F \subset F_a \subset \mathbb{R}^3$$

(l'inclusion de droite étant immédiate). Ainsi, en "passant à la dimension", on obtient que

$$\dim(F) \leqslant \dim(F_a) \leqslant \dim(\mathbb{R}^3)$$

c'est-à-dire, en utilisant la question 8,

$$3 \leqslant \dim(F_a) \leqslant 3$$

et donc nécessairement,

$$\boxed{\dim(F_a) = 3.}$$

Exercice 3 – EDHEC 2020, Maths E.

« Cet exercice est adapté du sujet EDHEC *2020, Maths E (l'énoncé du CB2 est assez fidèle à l'énoncé de base, seule quelques indications/questions intermédiaires ont été rajoutées.). »*

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$$

sont **continues sur** $[0,1]$ comme quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (car, pour tout $x \in [0,1]$, $(1+x)^2 \neq 0$ et $1+x \neq 0$). Ce qui justifie $\boxed{\text{l'existence de } I_n \text{ et de } J_n}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Calculer I_0.

On a

$$\begin{aligned}
\boxed{I_0} &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \\
&= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 \\
&= \frac{-1}{2} + 1 \\
&\boxed{= \tfrac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(b) Calculer I_1 à l'aide du changement de variable «$t = 1+x$».

- La fonction $t \mapsto \frac{t-1}{t^2}$ est continue sur $[1,2]$.
- La fonction $x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Donc, en effectuant le **changement de variables** «$t = 1+x$», on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{I_1} &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx \\
&= \int_1^2 \frac{t-1}{t^2}dt \\
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt \\
&= \left[\ln(t) + \frac{1}{t}\right]_1^2 \\
&\boxed{= \ln(2) - \tfrac{1}{2}}
\end{aligned}$$

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2} = x^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\forall x \in [0,1], \qquad \frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2}} &= \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2} \\
&= \frac{x^n(x^2+2x+1)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{x^n(1+x)^2}{(1+x)^2} \\
&\boxed{= x^n}
\end{aligned}$$

(b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par **linéarité de l'intégrale** et utilisant la relation de la question 3a , on obtient,

$$\begin{aligned}
\boxed{I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n} &= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+2}}{(1+x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1+x)^2} + \frac{x^n}{(1+x)^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
&\boxed{= \frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur I_2.

En utilisant la relation de la question 3b, on obtient,

$$I_2 + 2I_1 + I_0 = \frac{1}{0+1}$$

autrement dit,

$$I_2 = 1 - 2I_1 - I_0$$

En utilisant les calculs de I_0 et I_1 effectués aux questions 2a et 2b, on obtient,

$$\boxed{I_2} = 1 - 2\left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \boxed{= \frac{3}{2} - 2\ln(2)}$$

(d) En utilisant la relation de la Question 3b, compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur de I_n.

La relation de la question 3b induit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - 2I_{n+1} - I_n$$

On se sert de cette relation de récurrence pour calculer, grâce à une boucle for, de proche en proche les différents termes de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à obtenir la valeur souhaitée.

```
import numpy as np
def Integrale_I(n):
    a = 1/2
    b = np.log(2) - 1/2
    for k in range(n):
        aux = a
        a = b
        b = 1/(k+1)- 2*b - aux
    return b
```

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. On a,

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant x \leqslant 1 & \\ \text{donc} & 1 \leqslant 1+x \leqslant 2 & \\ \text{donc} & 1 \leqslant (1+x)^2 \leqslant 4 & \text{car } x \mapsto x^2 \text{ croissante sur } [0,+\infty[\\ \text{donc} & \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1 & \end{array}$$

En particulier,

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant \dfrac{1}{(1+x)^2} \leqslant 1 & \\ \text{donc} & 0 \leqslant \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n & \text{car } x^n \geqslant 0 \end{array}$$

Finalement, on a montré que

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^2} \leqslant x^n$$

Donc, par **croissance de l'intégrale**,

$$\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire, après calcul des deux intégrales aux extrémités (l'intégrale de droite ayant déjà été calculée à la question 3b par exemple),

$$\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

(b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Comme,

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

on en déduit de l'**encadrement** de la question 4a que la suite $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$ et que sa $\boxed{\text{limite est } 0}$.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad I_n = n \times J_{n-1} - \frac{1}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a,

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$$

Posons, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^n & \qquad & u'(x) & = & nx^{n-1} \\ v'(x) & = & \frac{1}{(1+x)^2} & & v(x) & = & -\frac{1}{1+x} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur le segment $[0,1]$. Donc par **intégrations par parties**, on a

$$\begin{aligned} \boxed{I_n} &= \left[\frac{-x^n}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x} dx \\ &= \frac{-1}{2} + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx \\ &\boxed{= -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}} \end{aligned}$$

6. (a) Calculer J_0.

On a,

$$\begin{aligned} \boxed{J_0} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \Big[\ln(|1+x|)\Big]_0^1 \\ &\boxed{= \ln(2)} \end{aligned}$$

(b) Montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \boxed{J_n + J_{n+1}} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 x^n dx \\ &\boxed{= \frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

(c) En déduire la valeur de J_1.

Grâce à la relation de la question 6b, on obtient que,

$$J_0 + J_1 = \frac{1}{0+1}$$

autrement dit,

$$J_1 = 1 - J_0$$

Donc, en utilisant le calcul de l'intégrale J_0 fait à la question , on obtient

$$\boxed{J_1 = 1 - \ln(2)}$$

(d) En utilisant la relation de la Question **??**, écrire une fonction en `Python`, appelée `Integrale_J`, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la valeur de J_n.

La relation de la question 3b induit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n$$

On se sert de cette relation de récurrence pour calculer, grâce à une boucle for, de proche en proche les différents termes de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à obtenir la valeur souhaitée.

```python
import numpy as np

def Integrale_J(n):
    J = np.log(2)
    for k in range(n):
    J = 1/(k+1) - J
    return (J)
```

7. Déduire des questions précédentes que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

On a montré à la question (à un décalage près) que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2}$$

autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n = \frac{I_{n+1} + \frac{1}{2}}{n+1} = \left(I_{n+1} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{n+1}$$

Or, on a démontré à la question que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers 0 et donc, en tant que suite extraite, que la suite $(I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0. Donc, par opérations sur les limites, on en déduit que la suite $\boxed{(J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge aussi vers } 0}$.

8. (a) <u>Simulation informatique.</u>

i. Écrire une fonction en `Python`, appelée `somme`, qui prend en argument un entier naturel `n` et qui renvoie la valeur de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

On utilise que :

$$S_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; S_{n+1} = S_n + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

pour calculer de proche en proche les termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ jusqu'à atteindre le terme souhaité.

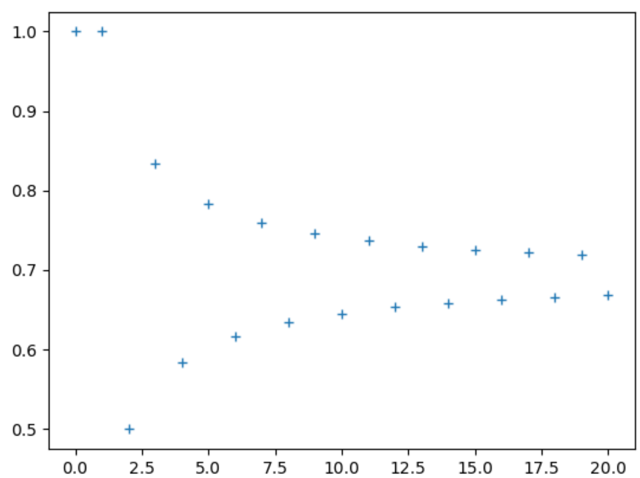
```python
def somme(n):
    S = 1
    for k in range(1, n):
        S = S + (-1)**k/(k+1)
    return(S)
```

ii. Compléter le programme suivant qui représente dans le plan les 20 premiers termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

abscisses = np.arange(0,21,1)
ordonnees =  [somme(n) for n in abscisses]
plt.plot(abscisses,ordonnees,'+')
plt.show()
```

iii. Le programme de la question précédente renvoie :



Que conjecture donc sur la convergence de la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \qquad ?$$

On conjecture que la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

est convergente car d'après le graphe de la question précédente, sa suite des sommes partielles semble converger vers une limite finie.

(b) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$$

Démontrons **par récurrence** que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}_n: \qquad « J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) »$$

est vraie.

- Initialisation. Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie. D'une part, d'après la question 6c,

$$J_1 = 1 - \ln(2)$$

D'autre part,

$$(-1)^1\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = -(\ln(2)-1) = 1-\ln(2)$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire que

$$J_n = (-1)^n\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que

$$J_{n+1} = (-1)^{n+1}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

On a,

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= -J_n + \frac{1}{n+1} \quad \text{d'après la question 7b}\\
&= -(-1)^n\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1} \text{ par hypothèse de récurrence}\\
&= (-1)^{n+1}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) + \frac{1}{n+1}\\
&= (-1)^{n+1}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\\
&= (-1)^{n+1}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion. Par principe de récurrence, on a démontré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad J_n = (-1)^n\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)}$$

(c) En déduire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et donner la valeur de sa somme.

Prouvons que la série converge en montrant que sa suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles converge où,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

En utilisant la relation démontrée à la question 8b, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \ln(2) - (-1)^n J_n$$

Or, d'après la question 7, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |(-1)^n J_n| \leqslant J_n$$

donc la suite $((-1)^n J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend aussi vers 0. Donc, par opérations sur les suites, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\ln(2)$. Ceci démontre que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est $\boxed{\text{convergente}}$ et que sa somme est donnée par

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2).}$$

Exercice 4 – ECRICOME 2014, Maths E. Soit p un réel appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p. On procède à l'expérience suivante : « *On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce* ». On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'évènement : «la pièce donne FACE lors du j-ième lancer» ;
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.

Par exemple, si les lancers sont donné dans cet ordre :

« FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE »

alors $Y = 4$.

1. Simulation informatique.
   (a) Écrire une fonction en `Python`, appelée `lancer`, qui prend en argument un réel `p`, qui créé un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0,1]$ et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à p et 0 sinon. *On admet que cette fonction permet de simuler un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile vaut p (le résultat* 1 *correspondant à l'obtention de Pile et* 0 *à Face.)*

```python
import numpy.random as rd

def lancer(p):
    x = rd.random()
    if x <p :
        return(1)
    else :
        return(0)
```

   (b) Compléter la fonction suivante en `Python`, qui prend en argument un réel `p`, qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier pile et renvoie le nombre de lancers effectués. *On pourra utiliser la fonction `lancer` en la répétant convenablement.*

```python
def premierpile(p):
    x = lancer(p) #Premier lancer
    c = 1 #Compteur nb de lancers
    while x == 0 : #tant qu'on obtient Face
        x = lancer(p) #on relance la pièce
        c = c + 1 #le compteur augmente de 1
    return(c)
```

   (c) Écrire une fonction en `Python`, appelée `second_pile`, qui prend en argument un réel `p`, qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second pile et renvoie le nombre de faces obtenus en tout. *On pourra utiliser la fonction `premier_pile` en la répétant convenablement.*

```python
def secondpile(p):
    return(premierpile(p) + premierpile(p) - 2)
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Reconnaître la loi de X_n. Préciser alors la valeur de son espérance $\mathbb{E}(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X_n correspond au nombre total de Pile obtenus lors de n lancers. De plus, la probabilité d'obtenir Pile lors d'un lancer est p. Ainsi, la variable X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)}$$

3. Déterminer l'ensemble des valeurs $Y(\Omega)$ prises par la variable aléatoire Y.

La variable aléatoire Y correspond au nombre de Face obtenus avant l'apparition du second pile. Elle prend des valeurs entières positives. De plus, au minimum, Y vaut 0 (si on obtient directement deux Piles aux deux premiers lancers). Elle peut valoir 1 (si on obtient Face, Pile, Pile ou Pile, Face, Pile), mais aussi 2, 3, et ainsi de suite. Donc,

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

4. Donner la valeur des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(Y = 0), \qquad \mathbb{P}(Y = 1), \qquad \mathbb{P}(Y = 2)$$

- L'évènement $Y = 0$ correspond à l'obtention de deux Piles lors des deux premiers tirages (ainsi, on a obtenu zéro Face avant d'obtenir le second Pile). Autrement dit,

$$[Y = 0] = \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2$$

De plus, comme les lancers sont **indépendants**, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 0)} = \mathbb{P}(\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2) = \mathbb{P}(\overline{F}_1) \times \mathbb{P}(\overline{F}_2) = p \times p \boxed{= p^2}$$

- L'évènement $Y = 1$ correspond à l'obtention d'un seul Face avant d'obtenir le second Pile. Cela correspond au tirage Face, Pile, Pile ou Pile, Face, Pile. Autrement dit,

$$[Y = 1] = \left(F_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3\right) \cup \left(\overline{F}_1 \cap F_2 \cap \overline{F}_3\right)$$

Or les évènements $F_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3$ et $\overline{F}_1 \cap F_2 \cap \overline{F}_3$ sont **incompatibles** donc,

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(F_1 \cap \overline{F}_2 \cap \overline{F}_3) + \mathbb{P}(\overline{F}_1 \cap F_2 \cap \overline{F}_3)$$

De plus, les lancers sont **indépendants**, donc comme avant, on obtient,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 1)} = (1-p) \times p \times p + p \times (1-p) \times p = 2(1-p)p^2 \boxed{= 2qp^2}$$

en ayant utilisé la notation $q = 1 - p$.

- De même,

$$[Y = 2] = \left(F_1 \cap F_2 \cap \overline{F}_3 \cap \overline{F}_4\right) \cup \left(F_1 \cap \overline{F}_2 \cap F_3 \cap \overline{F}_4\right) \cup \left(\overline{F}_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F}_4\right)$$

Et donc, en utilisant l'incompatibilité et l'indépendance, on obtient,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 2) = 3q^2p^2}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que les évènements

$$[Y = n] \qquad \text{et} \qquad (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$$

sont égaux.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Procédons par double inclusion.

- Si l'évènement $(X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$ est réalisé, alors, on a obtenu exactement 1 Pile lors des $n+1$ premiers lancers et on a obtenu Pile au $n+2$-ième lancer. Ainsi, avant le deuxième Pile (qui arrive donc au $n+2$-ième lancer), on a bien obtenu n Face.
- Si l'évènement $Y = n$ est réalisé, alors on a obtenu n Face avant d'obtenir le deuxième Pile, ce qui correspond à avoir obtenu exactement 1 Pile lors des $n+1$ premiers lancers et obtenu Pile au $n+2$-ième lancer.

D'où

$$\boxed{[Y = n] = (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}}$$

6. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(Y = n) = (n+1)p^2 q^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap \overline{F_{n+2}})$$

Or les évènements $X_{n+1} = 1$ et $\overline{F_{n+2}}$ sont indépendants (car ils ne décrivent pas les mêmes lancers et que les lancers sont indépendants. Donc,

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \times \mathbb{P}(\overline{F_{n+2}}) = \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \times p$$

Or, la variable aléatoire X_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres $n+1$ et p (cf question 2) donc,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \binom{n+1}{1} p^1 (1-p)^{n+1-1} = (n+1)p(1-p)^n = (n+1)pq^n$$

Et donc, finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = n) = (n+1)p^2 q^n}$$

7. Vérifier par le calcul que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = 1$$

Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on sait que $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'évènements et donc que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(Y = n)$ converge et que sa somme vaut 1. On va vérifier la valeur de la somme par le calcul. En utilisant la question précédente, on a,

$$\begin{aligned}
\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)p^2 q^n \\
&= p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} && \text{avec le chg d'indice } k = n+1 \\
&= p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} && \text{car série géo dérivée d'ordre 2} \\
&= p^2 \times \frac{1}{p^2} && \text{car q=1-p} \\
&\boxed{= 1}
\end{aligned}$$

8. Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $\mathbb{E}(Y)$ et donner sa valeur.

On s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où

$$\forall n \ \in \mathbb{N}, \qquad u_n = |n \times \mathbb{P}(Y = n)|$$

En utilisant le résultat de la question 6, on remarque que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = n(n+1)p^2 q^n$$

(tous les termes étant positifs). En effectuant un changement d'indice ($k = n+1$), finalement, on s'intéresse à la convergence de la série de terme général

$$\forall k \geqslant 2, \qquad v_k = (k-1)kp^2 q^{k-1} = p^2 q \times (k-1)kq^{k-2}$$

On reconnaît (à une constante près) un série géométrique dérivée d'ordre 2 qui converge car $q \in]-1,1[$. Donc, la variable aléatoire $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$ et celle-ci vaut,

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{E}(X)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(Y = n) \qquad \text{car le terme pour } n = 0 \text{ vaut } 0 \\
&= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)q^n \\
&= p^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)kq^{k-1} \qquad \text{avec le chg d'indice } k = n+1 \\
&= p^2 q \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)kq^{k-2} \\
&= p^2 q \frac{2}{(1-q)^3} \\
&= p^2 q \times \frac{2}{p^3} \\
&\boxed{= \tfrac{2q}{p}}
\end{aligned}$$

9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$. En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On peut montrer que (à détailler) :

$$\boxed{Y_k(\Omega) = \mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}(Y_k = n) = \tbinom{n+k-1}{k-1} p^{k-1} q^n}$$