TD 05 – Etude de fonctions (Correction)

Exercice 1 – Dans tout l'exeruice, on notera D_i l'ensemble de définition de la fonction fi (pour $i = 1, \ldots, 8$)

1. On a

$$\begin{aligned} x \in D_1 &\Leftrightarrow x+3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \neq -3 \end{aligned}$$

Donc $D_1 = \mathbb{R} \backslash \{-3\}$

2. Comme $x \mapsto x^2 + 1$ ne s'annule jamais, on a

$$D_2 = \mathbb{R}$$

3. On a

$$\begin{aligned} x \in D_3 &\Leftrightarrow 2x+1 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$D_3 = [-\frac{1}{2}, +\infty[.$$

4. Commençons par tracer le tableau de signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 3$ Résolvons $x^2 - 4x + 3 = 0$. - On calcule le discriminant

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 \\ &= 16 - 12 \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Comme $\Delta > 0$, deux racines:

Donc on a

$$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 2 = 3$$

et $x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, on a

$$\begin{aligned} x \in D_4 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3; +\infty[\end{aligned}$$

Donc

$$D_4 =]-\infty, 1] \cup [3; +\infty[.$$

5. On a

$$\begin{aligned} x \in D_5 &\Leftrightarrow \frac{x}{3} - 5 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 15 \end{aligned}$$

Donc $D_5 =]15; +\infty[$ **6.** On a

$$\begin{aligned} x \in D_6 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3>0 \\ \text{et} \\ 2x+1>0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x>-3 \\ \text{et} \\ x>-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_6 &=]-3;+\infty[\cap]-\frac{1}{2};+\infty[\\ &=]-\frac{1}{2};+\infty[\end{aligned}$$

7. $D_7 =]0;+\infty[$ (car fonction puissance réelle)

8. Comme les fonctions $x \mapsto 3x+2$ et $x \mapsto \exp(x)$ sont définies sue $\mathbb{R}$, par composée, la fonction f_8 est définie sue $\mathbb{R}$.

Donc $D_8 = \mathbb{R}$.

Exercice 2 – Dans tout l'exercice, on notera D_i l'ensemble de définition de la fonction fi (pour $i = 1,\dots,4$)

1. On a

$$\begin{aligned} x \in D_1 &\Leftrightarrow \left(x+1>0 \text{ et } 4-x^2 \neq 0\right) \\ &\Leftrightarrow (x>-1 \text{ et } x=2 \text{ et } x=-2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} D_1 &=]-1;+\infty[- \backslash\{2,-2\} \\ &=]-1;+\infty[- \{2\} \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est définie su $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(2x+3)$ et bien définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty\left[\left(\cos 2x+3>0 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}\right)\right.$. Donc la ponction f_2 est bien définie sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$

$$D_2 =]-\frac{3}{2};+\infty[$$

3. On a

$$\begin{aligned} x \in D_3 &\Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow e^x > 1 \\ &\Leftrightarrow x > \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Donc $D_3 =]0;+\infty[$.

4. On a

$$\begin{aligned} x \in D_4 &\Leftrightarrow \ln(x) > 0 \quad \text{et} \quad x>0 \\ &\Leftrightarrow \quad x > e^0 = 1 \quad \text{et} \quad x>0 \end{aligned}$$

Donc $D_4 =]1;+\infty[$

Exercice 3 – 1. Les deux fonctions sont définies su $\mathbb{R}$. Donc les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\bullet (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^3 \\ &\bullet (g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)-1 = x^3-1 \end{aligned}$$

2. • Pour tout $x \in D_g = \mathbb{R}, f(x) = x^2 \in D_g = [0;+\infty[$. Donc $g \circ f$ est bien définies su $D_y = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in D_y = \mathbb{R}$, on a

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

• Pour tout $x \in D_g = [0;+\infty[$, $g(x) = \sqrt{x} \in D_g = \mathbb{R}$. Donc $f \circ g$ est bien définie sur $D_g = [0;+\infty[$ et pour tout $x \in D_g = [0;+\infty[$, on a

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

3.• Pour tout $x \in D_f =]0;+\infty[$, $f(x) = \ln(x) \in D_g = \mathbb{R}$. Donc $g \circ f$ est bien définie sur $D_g =]0;+\infty[$ et pour tout $x \in D_g =]0;+\infty[$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)^2 - 1 = (\ln(x))^2 - 1.$$

• On se demande maintenant si pour tout $x \in D_g = \mathbb{R}, g(x) \in D_g =]0;+\infty[$. C'est faux car pour $x = 0, g(0) = -1 \notin D_f =]0;+\infty[$ donc la composée $f \circ g$ n'est pas bien définie.

Exercice 4 – 1. Pour la fonction f:
- domaine de déf: $]-1,1[$
- la fct est impaire
- la fct est strict. croissante su]-1,1[
- pas de majorants/minorants
- pas d'extrema

2.Pour la fonction g:
- domaine de déf: $\mathbb{R}$
- la fct est impaire
- la fct est strict. croissante sur $\mathbb{R}$
- majorants : $1, 2, \ldots$
- minorants : $-1, -2, \ldots$
- pas d'extrema

3. Pour la fonction h :
- domaine de déf: $\mathbb{R}$
- la fct est ni paire ni impaire
- la fct est strict. croissante su $]-\infty,-1]$, est strict décroissante sur $[-1,1]$ et strict croissante sur $[1;+\infty[$
- pas de majorants/minorant
- pas d'extrema

Exercice 5 – 1. • Soit $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x}{x^4+1} \end{array}$

Tout d'abord, f_1 est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^4 + 1$ ne s'annule jamais. - le domaine de f_1 est sym par rapport à zero.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_1(-x) = \frac{-x}{(-x)^4+1} = -\frac{x}{x^4+1} = -f_1(x).$$

Donc f_1 est impaire.

• S - Soit f_2 : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp\left(x^2\right)$$

Tout d' abord, f_2 est bien définie sue $\mathbb{R}$ comme composée des deux fonctions $x \mapsto \exp(x)$ et $x + x^2$ qui sont définies ser $\mathbb{R}$. le domaine de f_2 est bien sym par rapport à zéro. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f_2(-x) = \exp\left((-x)^2\right) = \exp\left(x^2\right) = f(x)$$

Donc f_2 est paire.

• Soit f_3 : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{x-1}{x^2+1}$

Tout d'abord, f_3 est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ ne s'annule jamais. Déjà le domaine de f_3 est bien symétrique par rapport à zéro.

- On a $f_3(1)=0$ et $f_3(-1)=-1$.
- Comme $f_3(1)\neq f_3(-1)$, f_3 n'est pas paire.
- Comme $f_3(1)\neq -f_3(-1)$, f_3 n'est pas impaire.

2.

• Soit $f_4 : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \exp(x)-\exp(-x)\end{array}$

Tout d' abord, $x\mapsto \exp(-x)$ et bien définie sur $\mathbb{R}$ comme composée des 2 fcts $x\mapsto \exp(x)$ et $x\mapsto -x$ définie sue $\mathbb{R}$. Puis f_4 est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme soustraction de 2 fcts définies sur $\mathbb{R}$.

De plus, le domaine de f4 est sym par rapport à 0 .

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$f_4(-x)=\exp(-x)-\exp(-(-x))=\exp(-x)-\exp(x)=-f_4(x)$$

Donc f_4 est impaire.

• Soit $f_6 : \begin{array}{l}\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto x^3+\dfrac{1}{x}.\end{array}$

Comme $x\mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto \ln(x)$ est définie sur $]0,+\infty[$, f_5 est bien définie sur $]0,+\infty[$. Comme le domaine n'est pas symétrique par rapport à zéro, $f_5 n$ 'est ni paire ni impaire.

• Soit $f_6 : \begin{array}{l}\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto x^3+\dfrac{1}{x}.\end{array}$

Comme $x\mapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto \frac{1}{x}$ est définie sue $\mathbb{R}^*$, f_6 est définie su $\mathbb{R}^*$. le domaine de f_6 est sym par rapport à 0 . Soit $x\in\mathbb{R}^\phi$. On a

$$f_6(-x)=(-x)^3+\frac{1}{(-x)}=-x^3-\frac{1}{x}=-f_6(x)$$

Donc f_6 est impaire.

3.

•La somme de deux fonctions paires est paire.

Soient f et g deux fonctions paires définies sur un ensemble D sym. % à zéro. Montrons que la fct $f+g$, définie aussi sue D est paire. Soit $x\in D$. On a

$$\begin{aligned}(f+g)(-x)&=f(-x)+g(-x)\\&=f(x)+g(x)\\&=(f+g)(x)\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est paire.

• De même, la somme de deux fonctions impaires est impaire,

• Pour la somme d'une fonction paire et d'une fct impaire, on me peut rien dire la fct $x\mapsto x$ est impaire et la fct $x\mapsto 1$ est paire. Pourtant, la fct $x\mapsto x+1$ est ni paire ni impaire:

$$f(1)=2 \text{ et } f(-1)=0$$

4. Un polynôme P de degré 2 qui admet deux racines notées x_1 et x_2 peut toujours s'écrire:
pour tout $x\in\mathbb{R}, P(x)=\lambda\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ I ci, on suppose que les racines sent opposées, i.e

$$x_2=-x_1$$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}, P(x)=\lambda\left(x-x_1\right)\left(x+x_1\right)$

$$=\lambda\left(x^2-x_1^2\right)$$

Montrons que P est paire.
- Son domaine de définition, $\mathbb{R}$, est symétrique par rapport à 0 .
- Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P(-x) &= \lambda\left((-x)^2 - x_1^2\right) \\ &= \lambda\left(x^2 - x_1^2\right) \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Donc P est paire

Exercice 6 – Soit $x \in [1,3[$.

• On a $x \geqslant 1$
donc $x^2 \geq 1$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $-x^2 \leq -1$ car $-1 < 0$
donc $-\frac{1}{x^2} \geqslant -1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$
donc $-\frac{2}{x^2} \geqslant -2$ car $2 > 0$
• On a $x \leqslant 3$
donc $x^2 \leqslant 9$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$
donc $-x^2 \geqslant -9$ car $-1 < 0$
donc $-\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{9}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$
donc $-\frac{2}{x^2} \leq -\frac{2}{9}$ car $2 > 0$

2. Soit $x \in [-3,2]$. on a

$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{18} \leqslant \frac{1}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{car } 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 18 \geqslant (x-1)^2 + 2 \geqslant 2$$

car tous les termes sont > 0 et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sus $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 18 \geqslant (x-1)^2 + 2 \\ &\quad \text{et} \quad (x-1)^2 + 2 \geqslant 2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 16 \quad \text{et} \quad \underbrace{(x-1)^2 \geqslant 0}_{\text{toujours vrai}} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 \leqslant 16 \\ &\Leftrightarrow |x-1| \leqslant 4 \end{aligned}$$

car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ car $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie pour $x \in [-3,2]$.
Donc, pour tout $x \in [-3,2]$, on a

$$\frac{1}{6} \leqslant \frac{3}{(x-1)^2+2} \leqslant \frac{3}{2}$$

3.• Soit $u \in [1,4]$. - $u \geqslant 1$ donc $u - 1 \geqslant 0$ et $\sqrt{u} \geqslant \sqrt{1} = 1$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
donc $\sqrt{x} + x - 1 \geqslant 1$
donc $\frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \leqslant 1$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et les deux termes sont > 0
• $u \leq 4$ donc $u - 1 \leq 3$ et $\sqrt{u} \leqslant \sqrt{4} = 2$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
donc $\sqrt{u} + u - 1 \leq 5$
donc $\frac{1}{\sqrt{u}+u-1} \geqslant \frac{1}{5}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et les deux termes sont > 0

4 . Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $2 \leq a \leq 3$ et $1 \leq b \leq 2$.

on a $4 \leq a^2 \leq 9$ (*) car tous les termes sont $\geqslant 0$ et $x \mapsto x^2$ croissante sur $\mathbb{R}_+$

et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{b} \leq 1$ car tous les termes sont $\geqslant 0$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $1 \leq \frac{2}{b} \leq 2$

donc $-2 \leq -\frac{2}{b} \leq -1$ (**)

En sommant les inégalités $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 8.$$

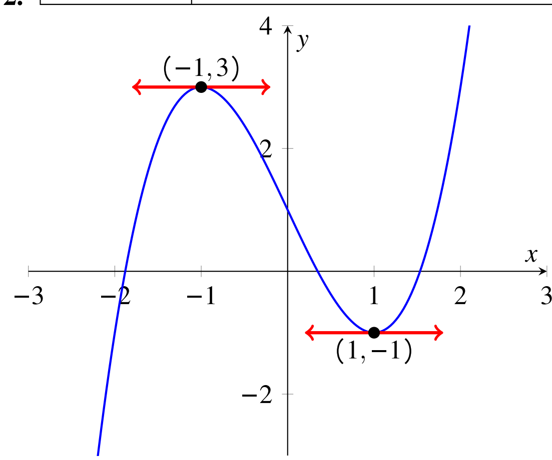
Exercice 7 – 1. La fonction f est dérivable su $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

On peut en déduire le tableau de signe de f' puis le tableau de variations de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

2.



3 pas de minimum car $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
pas de maximum car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

4. $f(-1) \neq f(1)$ donc f pas paire $f(-1) \neq -f(1)$ donc f pas impaire