TD 07 – Ensembles

Exercice 1 – Donner $\mathscr{P}(\{2,4,6\})$.

Faisons la liste possible des parties

- parties à 0 éléments : $\emptyset$
- parties à 1 élément : $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$
- parties à 2 éléments : $\{2,4\}$, $\{2,6\}$, $\{4,6\}$
- parties à 3 éléments : $\{2,4,6\}$

Donc

$$\mathcal{P}(\{2,4,6\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$$

Exercice 2 – Déterminer $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0,\ 2x-y+z=0 \text{ et } -x+5y+z=0\}$

Soit $(x,y,z) \in F$. Alors (x,y,z) est solution de

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 6y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 0 \\ \cancel{0 = 0} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Il y a plus d'inconnues que d'équations : on choisit deux inconnues principales par ex x et y que l'on exprime en fct de l'inconnue restante ici z

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = \left(-\frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}z, z\right)$.

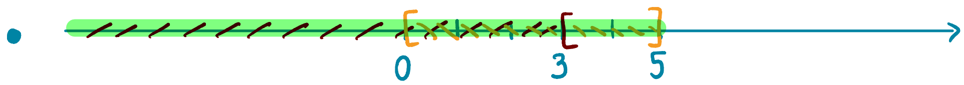
Donc $F = \left\{ \left(-\frac{2}{3}z, -\frac{1}{3}z, z\right) ; z \in \mathbb{R} \right\}$

ou de manière équivalente

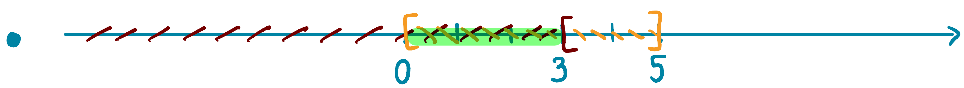
$F = \{(2u, u, -3u) ; u \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3 – Soient $A =]-\infty, 3[$ et $B = [0,5]$ deux parties de $\mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants

$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A \setminus B, \qquad B \setminus A, \qquad \overline{A} \quad \text{et} \quad \overline{B}$$

- 

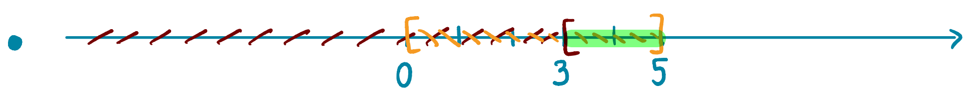
Donc $A \cup B =]-\infty, 5]$

- 

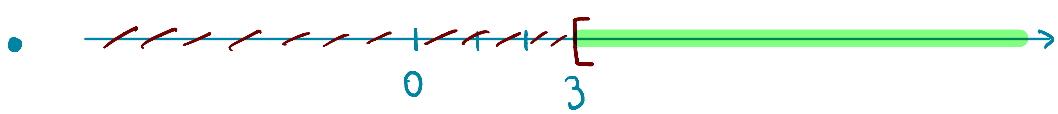
Donc $A \cap B = [0,3[$

- 

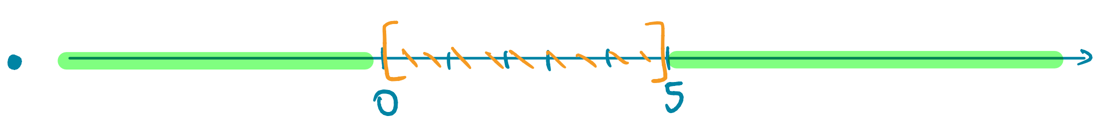
Donc $A \setminus B =]-\infty, 0[$

- 

Donc $B \setminus A = [3,5]$

- 

Donc $\overline{A} = [3 ; +\infty[$

- 

Donc $\overline{B} =]-\infty, 0[\cup]5 ; +\infty[$

Exercice 4 – *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Montrer que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\} \subset [-2,2]^2$.
2. Montrer, par double-inclusion, que $A=B$ où

$$A = \left\{(a-b, b, -2a+3b),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0\right\}$$

3. Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+2z=0\}$ et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+3z=0\}$. Déterminer $E \cap F$.

1. Soit $(x,y) \in E$. Montrons que $(x,y) \in [-2,2]^2$.

Comme $(x,y) \in E$, on a $x^2+y^2=4$.

On cherche à mque $-2 \leq x \leq 2$ i.e $|x| \leq 2$ et $|y| \leq 2$.

- On a $0 \leq x^2 \leq x^2+y^2 = 4$ car $y^2 \geq 0$

Donc $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$ car tous les termes sont positifs et car la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

i.e. $|x| \leq 2$

- De même, on obtient $|y| \leq 2$.

Donc $(x,y) \in [-2,2]^2$. D'où $E \subset [-2,2]^2$.

2. Montrons que $A \subset B$.

★ Soit $(x,y,z) \in A$. Montrons que $(x,y,z) \in B$.

Comme $(x,y,z) \in A$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $x=a-b$, $y=b$ et $z=-2a+3b$.

On cherche à mque $2x-y+z=0$.

- On a :

$$\begin{aligned} 2x-y+z &= 2(a-b)-b+(-2a+3b) \\ &= 2a-2b-b-2a+3b \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(x,y,z) \in B$. Donc $A \subset B$.

★ Soit $(x,y,z) \in B$. Montrons que $(x,y,z) \in A$.

Comme $(x,y,z) \in B$, on a $2x-y+z=0$.

On cherche à mqu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq $(x,y,z) = (a-b, b, -2a+3b)$.

c'est-à-dire on cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tq

$$\begin{cases} x = a-b \\ y = b \\ z = -2a+3b \end{cases}$$

On a envie de prendre $b=y$ et $a=x+y$.

- Posons $a=x+y$ et $b=y$. On a $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et

$a-b = x+y-y = x$

$b = y$

$-2a+3b = -2(x+y)+3y = -2x+y = z$ car $(x,y,z) \in B$

Donc $(x,y,z) = (a-b, b, -2a+3b)$

Donc $(x,y,z) \in A$. Donc $B \subset A$.

3. Soit $(x,y,z) \in E \cap F$.

Donc $(x,y,z) \in E$ <u>et</u> $(x,y,z) \in F$.

- Comme $(x,y,z) \in E$, on sait que
$$2x - y + 2z = 0$$
- Comme $(x,y,z) \in F$, on sait que
$$x + y + 3z = 0$$

Donc finalement, (x,y,z) est solution de

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -3y + 4z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} x = -\frac{5}{3}z \\ y = -\frac{4}{3}z \end{cases}$$

Donc $(x,y,z) = \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right)$.

Donc $E \cap F \subset \left\{ \left(-\frac{5}{3}z, -\frac{4}{3}z, z\right) ; z \in \mathbb{R} \right\} = G$

- Montrons l'inclusion réciproque.

<u>Soit</u> $(x,y,z) \in G$. <u>Montrons que</u> $(x,y,z) \in E \cap F$.

Comme $(x,y,z) \in G$, il existe $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{3}\tilde{z} \\ y = -\frac{4}{3}\tilde{z} \\ z = \tilde{z} \end{cases}$$

- D'une part, on a

$$2x - y + 2z = 2\times\left(-\frac{5}{3}z\right) - \left(-\frac{4}{3}z\right) + 2z$$
$$= -\frac{10}{3}z + \frac{4}{3}z + \frac{6}{3}z$$
$$= 0$$

Donc $(x, y, z) \in E$.

- D'autre part, on a

$$x + y + 3z = -\frac{5}{3}z - \frac{4}{3}z + 3z$$
$$= -\frac{9}{3}z + \frac{9}{3}z$$
$$= 0$$

Donc $(x, y, z) \in F$.

Donc $(x, y, z) \in E \cap F$. Donc $G \subset E \cap F$.

Conclusion : Finalement, par double inclusion,

$$E \cap F = G = \left\{ \left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, z\right) ; z \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 5 – Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E non vide. Démontrer la proposition suivante

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

On va démontrer la proposition par double inclusion.

- Montrons que $(A\cap B)\cup C \subset (A\cup C)\cap(B\cup C)$

  Soit $x \in (A\cap B)\cup C$. Montrons que $x \in (A\cup C)\cap(B\cup C)$.

  Comme $x \in (A\cap B)\cup C$, on sait que
  - ▶ soit $x \in A\cap B$
  - ▶ soit $x \in C$

  1er cas : si $x \in C$ alors $x \in A\cup C$ et $x \in B\cup C$
  donc $x \in (A\cup C)\cap(B\cup C)$

  2ème cas : si $x \in A\cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$
  donc $x \in A\cup C$ et $x \in B\cup C$
  donc $x \in (A\cup C)\cap(B\cup C)$

  Donc, dans tous les cas, $x \in (A\cup C)\cap(B\cup C)$. Donc $(A\cap B)\cup C \subset (A\cup C)\cap(B\cup C)$

- Montrons que $(A\cup C)\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup C$.

  Soit $x \in (A\cup C)\cap(B\cup C)$. Montrons que $x \in (A\cap B)\cup C$.

  Comme $x \in (A\cup C)\cap(B\cup C)$, on sait que
  $x \in A\cup C$ et $x \in B\cup C$.

  Comme $x \in A\cup C$
  - ▶ soit $x \in A$
  - ▶ soit $x \in C$

  1er cas : si $x \in C$ alors $x \in (A\cap B)\cup C$.

  2ième cas : si $x \in A$ alors comme $x \in B\cup C$,
  - ▶ soit $x \in B$
  - ▶ soit $x \in C$

  1er sous-cas : si $x \in C$ alors $x \in (A\cap B)\cup C$

  2ème sous-cas : si $x \in B$ alors comme $x \in A$, on a $x \in A\cap B$
  donc $x \in (A\cap B)\cup C$.

  Donc, dans tous les cas, $x \in (A\cap B)\cup C$. Donc $(A\cup C)\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup C$.

Conclusion : Par principe de double inclusion, on a
$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$