TD 08 – Polynômes

Exercice 1 – Opérations sur les polynômes. Déterminer le degré des polynômes suivants sans faire de calculs sur le papier.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x) = x^3 - (x-2)^2$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = x^3 - x(x-2)^2$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_3(x) = (x+1)^{10} - (4x^2+1)^8$

Exercice 2 – Opérations sur les polynômes. Soient P et Q deux polynômes définis par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5 \qquad \text{et} \qquad Q(x) = x^2 - 7x + 1$$

1. Pour les deux polynômes P et Q, donner :
   - leur coefficient constant,
   - leur degré,
   - leur coefficient dominant,
   - un entier n tels qu'ils appartiennent à $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Sans faire de calculs, donner une information sur le degré des polynômes suivants :

$$\text{i) } -2P \qquad \text{ii) } P+Q \qquad \text{iii) } PQ$$

3. $(\star)$ Calculer le polynôme PQ en utilisant la formule suivante

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (PQ)(x) = \sum_{k=0}^{\deg(P)+\deg(Q)} c_k x^k \quad \text{où} \quad \text{pour tout} k \in [\![0, \deg(P)+\deg(Q)]\!], \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

4. Calculer les trois polynômes de la Question 2, et vérifier que les réponses aux Questions 2 et 3 coïncident avec ces résultats.

Exercice 3 – Unicité des coefficients d'un polynôme.

1. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}, \quad \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

2. $(\star)$ En déduire la valeur de la somme suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)(k+1)}$$

Exercice 4 – Relations coefficients-racines. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. Résoudre le système suivant d'inconnues $(r,s) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} r & + & s & = & -2 \\ r & \times & s & = & -15 \end{array} \right.$$

(Indication : On montrera que s et r sont les racines d'un polynômes à déterminer.)

2. $(\star)$ Déterminer l'âge de Marc et Sophie sachant que Marc est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28 et que le produit de leurs âges est égal à 192. *(Indication :* $28^2 = 784$. *On montrera que les âges de Marc et Sophie sont les racines d'un polynômes à déterminer.)*
3. $(\star)$ Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \ln(x) & + & \ln(y) & = & 5 \\ \ln(x) & \times & \ln(y) & = & 4 \end{array} \right.$$

(Indication : On montrera que $s = \ln(x)$ *et* $r = \ln(y)$ *sont les racines d'un polynômes à déterminer.)*

Exercice 5 – Factorisation/Racines d'un polynôme. Soit P le polynôme défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = 3x^3 - x - 2$$

0. Donner le nombre maximal de racines distinctes possible pour le polynôme P.
1. Vérifier que 1 est une racine évidente du polynôme P.
2. Trouver un polynôme Q tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x-1)Q(x).$$

3. En déduire toutes les racines de P.
4. ($\star$) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \geqslant 0$. *(On s'aidera de la forme factorisée pour dresser le tableau de signe de P.)*

Exercice 6 – Factorisation/Racines d'un polynôme. Soit P le polynôme défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

0. Donner le nombre maximal de racines distinctes possible pour le polynôme P.
1. Vérifier que -2 est une racine évidente du polynôme P.
2. Trouver un polynôme Q tel que,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+2)Q(x).$$

3. Factoriser complètement le polynôme P.
4. En déduire toutes les racines de P.
5. ($\star$) Résoudre les équations suivantes. *(On pourra considérer des nouvelles variables $X = \ln(x)$ ou $X = \mathrm{e}^x$.)*
   (a) $(\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 6 = 0$
   (b) $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 6\mathrm{e}^{-x} - 5 = 0$

Exercice 7 – Factorisation/Racines d'un polynôme. Soit P le polynôme défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$$

0. Donner le nombre maximal de racines distinctes possible pour le polynôme P.
1. ($\star$) Déterminer toutes les racines de P.
2. Écrire P sous forme factorisée.

Exercice 8 – Division euclidienne. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les deux cas suivants?

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = 2x^5 + x^3 + 17x - 2$ et $B(x) = x^2 + 2x + 3$.