I. Avant-propos : les règles de calcul

Ce chapitre, qui comprend des rappels de lycée, porte sur les **identités remarquables**, les **fractions**, les **puissances** et la **racine carré**. On y rappelle les principales règles de calcul à connaître sans hésitation.

1 Les identités remarquables

Proposition 1.1 Soient a, b deux réels. On a les *identités remarquables* suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{I.1}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \tag{I.2}$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2. \tag{I.3}$$

? Le membre de gauche de chaque égalité correspond à la forme *factorisée* : si on voulait faire le calcul effectif avec deux nombres donnés, la dernière opération que l'on ferait est une *multiplication*, par exemple,

$$(1+3)^2 = 4^2 = 4 \times 4 = 16.$$

De même, le membre de droite correspond à la forme *développée* : si on voulait faire le calcul effectif avec deux nombres donnés, la dernière opération que l'on ferait est une *addition*, par exemple,

$$1^2 + 2 \times 1 \times 3 + 3^2 = 1 + 6 + 9 = 16.$$

Exercice 1.2 Dans les égalités suivantes, identifier les formes *factorisées* et *développées* et indiquer l'identité remarquable utilisée.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 25 &= (x+5)^2, && \text{identité remarquable (I.1)} \\ (x-1)^2 &= x^2 - 2x + 1, && \text{identité remarquable (I.2)} \\ x^2 - 49 &= (x-7)(x+7). && \text{identité remarquable (I.3)} \end{aligned}$$

Exercice 1.3 Utiliser les identités remarquables pour factoriser/développer les expressions suivantes.

- $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$
- $u^2 - 6u + 9 = (u-3)^2$
- $a^2 - 25 = (a-5)(a+5)$
- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $1 - 4v^2 = (1-2v)(1+2v)$
- $x - 4x^2 = x(1-4x)$

2 Les fractions

2.1 La notion d'inverse et de fraction

Définition 2.1 Lorsque b est un réel non nul, l'*inverse* de b est le réel x tel que $x \times b = 1$. On le note $\frac{1}{b}$. On a donc

$$\frac{1}{b} \times b = 1.$$

Exemple 2.1

Nombre	Inverse
2	$\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{1} = 1$
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Définition 2.2 Lorsque a est un réel et b est un réel non nul, le réel $\frac{a}{b}$ désigne le produit $a \times \frac{1}{b}$. Dans la fraction $\frac{a}{b}$, le nombre a est appelé le numérateur, et b, le dénominateur.

! 0 est donc le seul nombre réel à ne pas avoir d'inverse : il n'existe pas de nombre réel x tel que $x \times 0 = 1$. On ne peut donc jamais avoir 0 au dénominateur d'une fraction.

Proposition 2.2 Lorsque a et b sont deux réels non nuls,

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$$

Démonstration. Soient a et b deux réels non nuls. D'après la Définition 2.2, on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = a \times \frac{1}{b} \times b \times \frac{1}{a}.$$

De plus, dans une multiplication, on peut changer l'ordre des facteurs. Donc, on a,

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = a \times \frac{1}{a} \times b \times \frac{1}{b}.$$

Finalement, en utilisant la Définition 2.1, on obtient

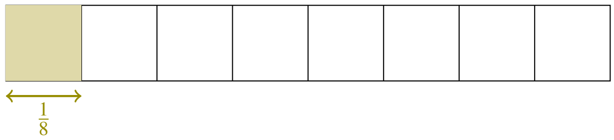
$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 \times 1 = 1.$$

∎

? En mathématiques, la notion de *fraction* est donc liée à celle d'*inverse*. Dans le "langage courant", une fraction représente un *partage* : le dénominateur désigne le nombre de parts égales faites dans une unité, et le numérateur représente le nombre de parts prises dans cette unité.
Par exemple, le nombre $\frac{1}{8}$ est l'inverse du nombre 8, c'est-à-dire,

$$\frac{1}{8} \times 8 = 1.$$

Mais $\frac{1}{8}$ représente aussi une part d'un gâteau divisé en 8 parts :



Ces notions d'*inverse* et de *partage* sont liées : si on doit partager équitablement un gâteau entre plusieurs personnes, la taille des parts sera *inversement proportionnelle* au nombre de personnes.

2.2 Règles de calcul pour les fractions

Proposition 2.3 — Simplification. Soient a, b et c trois nombres réels, tels que a et c soient non nuls. On a

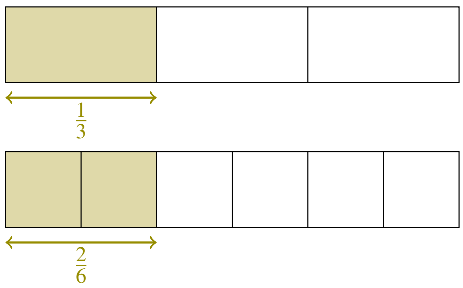
$$\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}.$$

Autrement dit, on ne modifie pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.

Exemple 2.4 Par exemple,

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times \cancel{2}}{3 \times \cancel{2}} = \frac{2}{6}.$$

Cela correspond au fait que manger deux parts d'un gâteau partagé en six parts revient au même que manger une part de ce gâteau partagé en trois.



En pratique, comment *simplifier* une fraction ?

1. On trouve un *facteur commun* au numérateur et au dénominateur de la fraction, c'est-à-dire un nombre qui divise à la fois le numérateur et le dénominateur. Si on n'a pas d'idées de facteurs en commun, on peut tester les petits nombres, 2, 3, 4,...
2. On obtient la fraction simplifiée en *divisant* le numérateur et le dénominateur par le facteur en commun.

Par exemple, essayons de simplifier la fraction $\frac{105}{60}$.

- Cherchons un facteur commun. Le nombre 2 divise le numérateur mais pas le dénominateur, ce n'est pas un facteur commun. Le nombre 3 divise 105 car $105 = 3 \times 35$ et il divise 60 car $60 = 3 \times 20$, c'est un facteur en commun.
- On simplifie donc par 3.

$$\frac{105}{60} = \frac{\cancel{3} \times 35}{\cancel{3} \times 20} = \frac{35}{20}.$$

- On recommence... On cherche un facteur en commun : 2, 3 et 4 ne fonctionnent pas mais 5 fonctionne.
- On simplifie par 5.

$$\frac{105}{60} = \frac{35}{20} = \frac{\cancel{5} \times 7}{\cancel{5} \times 4} = \frac{7}{4}.$$

- On ne peut plus continuer : 4 est uniquement divisible par 2 et 4, mais 7 n'est pas divisible par 2 ou 4. On s'arrête donc.

Exercice 2.5 Simplifier au maximum les fractions suivantes.

$$\frac{40}{90} = \frac{4}{9} \qquad \frac{18}{72} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{16}{24} = \frac{2}{3} \qquad \frac{125}{75} = \frac{5}{3}$$

Exercice 2.6 Parmi les quotients suivants, quels sont ceux égaux à $\frac{5}{3}$?

■ $\frac{45}{27}$ ■ $\frac{90}{54}$ □ $\frac{40}{25}$ ■ $\frac{50}{30}$

! Attention aux simplifications abusives... Par exemple, on ne peut *pas* simplifier un terme en commun dans une *addition* en haut et en bas d'une fraction :

$$\frac{a+b}{a+c} \neq \frac{b}{c}.$$

Par exemple,

$$\frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4} \neq \frac{2}{3}.$$

Proposition 2.7 — Addition/Soustraction. Soient a et b deux nombres réels et c un nombre réel non nul. On a

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

! Pour additionner deux fractions, il est nécessaire que le dénominateur des deux fractions soit le même. Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord mettre les fractions *au même dénominateur* avant de les *additionner*.

? En pratique, comment mettre *au même dénominateur* deux fractions ?

- Un dénominateur commun évident aux deux fractions $\frac{a_1}{b_1}$ et $\frac{a_2}{b_2}$ est $b_1 \times b_2$.
  Donc, pour mettre au même dénominateur les deux fractions, on peut multiplier le numérateur et dénominateur de la première fraction par b_2 et ceux de la deuxième fraction par b_1. Après, on peut additionner les fractions.
  $$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \times b_2}{b_1 \times b_2}+\frac{a_2 \times b_1}{b_2 \times b_1} = \frac{a_1 \times b_2 + a_2 \times b_1}{b_1 \times b_2}.$$
  Par exemple,
  $$\frac{5}{12}+\frac{1}{6} = \frac{5\times 6}{12\times 6}+\frac{1\times 12}{6\times 12} = \frac{30}{72}+\frac{12}{72} = \frac{42}{72}.$$
  On n'oublie pas de simplifier le résultat au maximum...
  $$\frac{5}{12}+\frac{1}{6} = \frac{42}{72} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$
  Cette méthode fonctionne à chaque fois mais elle n'est pas très optimale, car on obtient souvent des très gros dénominateurs.
- La deuxième méthode consiste à trouver "à la main" un dénominateur commun. Par exemple,
  $$\frac{5}{12}+\frac{1}{6} = \frac{5}{12}+\frac{1\times 2}{6\times 2} = \frac{5}{12}+\frac{2}{12} = \frac{7}{12}.$$
  On voit que la deuxième méthode est bien plus efficace !

Exercice 2.8 Calculer les additions/soustractions de fractions suivantes.

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6} = \frac{3\times 3}{4\times 3}+\frac{5\times 2}{6\times 2} = \frac{9}{12}+\frac{10}{12} = \frac{19}{12}$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1\times 2}{3\times 2}-\frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{2}{6}-\frac{3}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$1+\frac{2}{3} = \frac{3}{3}+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Exercice 2.9 Soit $x > 0$. Écrire la fraction suivante comme une somme de fractions :

$$\frac{x^3 + x^2\ln(x) + 1}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{x^2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} = x^2 + x\ln(x) + \frac{1}{x}.$$

On n'a pas de règle si l'addition est au dénominateur.

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}.$$

Par exemple,

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Proposition 2.10 — Multiplication. Soient a, b deux nombres réels et c, d deux nombres réels <u>non nuls</u>. On a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Exercice 2.11 Calculer les multiplications de fractions suivantes.

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{3\times 5}{4\times 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1\times -1}{3\times 2} = -\frac{1}{6}$$

Proposition 2.12 — Fraction de deux fractions. Soit a un nombre réel et b, c, d trois nombres réels <u>non nuls</u>. On a

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}.$$

Pensez à bien aligner correctement les traits de fractions quand il y en a plusieurs, cela peut changer le résultat.... Par exemple :

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3} \quad \text{alors que} \quad \frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{2}{15}$$

Exercice 2.13 Calculer la fraction suivante :

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{3 \times 6}{4 \times 5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

Exercice 2.14 Soit x un réel <u>non nul</u>. Écrire la fraction suivante comme une somme de fractions :

$$\frac{\frac{1}{3}\left(x + \frac{6}{x}\right)}{x} = \frac{1}{3}\left(x + \frac{6}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{6}{x^2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{x^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{x^2}$$

3 Les puissances

Définition 3.1 — Puissances positives. Pour tout entier naturel <u>non nul</u> n et a réel,

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

Lorsque $n = 0$, par convention, pour tout a réel, on a $a^0 = 1$.

Exercice 3.1 Calculer les puissances suivantes.

$$\begin{array}{lll} 2^0 &=& 1 \\ 5^1 &=& 5 \\ 2^4 &=& 16 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} (-3)^0 &=& 1 \\ (-6)^1 &=& -6 \\ (-5)^3 &=& -125 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \pi^0 &=& 1 \\ \pi^1 &=& \pi \\ (-2)^5 &=& -32 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 0^0 &=& 1 \\ 6^2 &=& 36 \end{array}$$

et

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

(!) Attention aux parenthèses :

$$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9 \qquad \text{alors que} \qquad -3^2 = -(3 \times 3) = -9$$

Définition 3.2 — Puissances négatives. Soient a un réel non nul et n un entier naturel non nul,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exercice 3.2 Calculer les puissances suivantes.

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad (-3)^{-1} = -\frac{1}{3} \qquad 4^{-2} = \frac{1}{16} \qquad (-2)^{-5} = -\frac{1}{32}$$

Proposition 3.3 — Règles de calcul sur les puissances. Soient a, b des réels non nuls et n, m des entiers.

1. Multiplication de puissances : $a^n \times a^m = a^{n+m}$.
2. Puissance d'une puissance : $(a^n)^m = a^{n \times m}$.
3. Fraction de puissances : $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
4. Produit de puissances : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.
5. Puissance d'une fraction : $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Exercice 3.4 Soient x, y deux nombre réel. Simplifier les expressions suivantes.

1. $x^2 \times x^3 = (x \times x) \times (x \times x \times x) = x^{2+3} = x^5$
2. $(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 = x \times x \times x \times x \times x \times x = x^{2\times 3} = x^6$
3. $\frac{2^7}{2^5} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}} = 2^{7-5} = 2^2 = 4$
4. $(xy^2)^2 = (x \times y^2)^2 = x^2 \times (y^2)^2 = x^2 \times y^{2+2} = x^2y^4$
5. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2\times 2\times 2}{3\times 3\times 3} = \frac{8}{27}$

Exercice 3.5 Simplifier l'expression suivante :

$$\left(\frac{2(xy)^2}{y^3}\right)^4 = \left(\frac{2x^2y^2}{y^3}\right)^4 = \left(\frac{2x^2}{y}\right)^4 = \frac{16x^8}{y^4}$$

Exercice 3.6 Écrire sous la forme d'une unique fraction l'expression suivante

$$\left(\frac{1}{xy}\right)^2 - \frac{3}{yx^4} = \frac{1}{x^2y^2} - \frac{3}{yx^4} = \frac{x^2 - 3y}{x^4y^2}$$

(!) Il n'y a pas de règle pour l'addition de deux puissances.

4 La racine carrée

Définition 4.1 Lorsque a est un réel positif, la racine carrée de a est l'unique réel positif x tel que $x^2 = a$. On le note $\sqrt{a}$. On a donc

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

! $\sqrt{a}$ n'existe que si a est un réel positif. Par exemple, $\sqrt{-1}$ n'existe pas.

! Par définition, pour tout réel a positif, $\sqrt{a}$ est aussi un réel positif.

Exemple 4.1 L'équation $x^2 = 1$ admet deux solutions : 1 et -1. L'unique réel positif vérifiant $x^2 = 1$ est donc 1. Ainsi,

$$\sqrt{1} = 1.$$

Exemple 4.2 On a $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$ et 2 est un réel positif.

! Dans certain cas, la racine carrée d'un nombre ne s'écrit pas simplement. Par exemple, $\sqrt{2}$ est l'unique entier positif vérifiant $x^2 = 2$, mais on ne sait pas l'écrire autrement que comme $\sqrt{2}$.

Exercice 4.3 Écrire la racine carrée des nombres suivantes :

$$\sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt{9} = 3, \qquad \sqrt{7} = \sqrt{7}.$$

Proposition 4.4 — Règles de calcul sur les racines carrées. Soient a et b des entiers positifs.

- Multiplication de racines : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.
- Fraction de racines : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

! On ne dispose pas de règles pour l'addition de deux racines :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Par exemple,

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \text{alors que } \sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2.$$

Proposition 4.5 — Racine carrée d'un carré. Soit a un nombre réel. On a :

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4.6 Calculer les racines suivantes :

$$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt{(-4)^2} = 4$$

? Pour simplifier des racines carrées, il s'agit donc de repérer des facteurs carrés sous la racine.

Exercice 4.7 Simplifier les racines suivantes :

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$