Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$P_1(x) = \underbrace{x^3}_{\text{degré } 3} - \underbrace{(\underbrace{x-2}_{\text{degré } 1})^2}_{\text{degré } 2}$$

Donc P_1 est de degré 3

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$P_2(x) = \underbrace{x^3}_{\text{degré } 3} - \underbrace{\underbrace{x}_{\text{degré } 1}\underbrace{(x-2)^2}_{\text{degré } 2}}_{\text{degré } 3}$$

Pour s'assurer que P_2 est vraiment de degré 3 (ou pas) il faut regarder si les coeff dom s'annulent

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$P_2(x) = \underbrace{x^3}_{1} - \underbrace{\underbrace{x}_{1}\underbrace{(\underbrace{x-2}_{1})^2}_{1}}_{1}$$

coeff dom

Donc les termes de degré 3 vont s'annuler et finalement, P_2 est de degré 2.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$P_3(x) = \underbrace{(\underbrace{x+1}_{\text{deg } 1})^{10}}_{\text{deg } 10} - \underbrace{(\underbrace{4x^2+1}_{\text{deg } 2})^8}_{\text{deg } 2\times 8 = 16}$$

Donc P_3 est de degré 16.

Exercice 2

1.

	P	Q
coeff. constant	5	1
degré	3	2
coeff. dom.	3	1
ensemble	$\mathbb{R}_3[x], \mathbb{R}_4[x], \ldots$	$\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}_3[x], \ldots$

2. On a :

- $\deg(-2P) = \deg(P) = 3$
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q) = \max(3,2) = 3$
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q = 3 + 2 = 5$

3. Commençons par calculer les coefficients $(c_k)_{k=0\ldots5}$.

$$c_0 = \sum_{i=0}^{0} a_i b_{0-i} = a_0 b_0 = 5 \times 1 = 5$$

$$c_1 = \sum_{i=0}^{1} a_i b_{1-i} = a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \times 1 + 5 \times (-7) = -35$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^{2} a_i b_{2-i} = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 4 \times 1 + 0 \times (-7) + 5 \times 1 = 9$$

$$c_3 = \sum_{i=0}^{3} a_i b_{3-i} = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3 = 3 \times 1 + 4 \times (-7) + 0 \times 1 + 5 \times 0 = -25$$

$$c_4 = \sum_{i=0}^{4} a_i b_{4-i} = a_4 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 + a_0 b_4 = 0 \times 1 + 3 \times (-7) + 4 \times 1 + 0 \times 0 + 5 \times 0 = -17$$

$$c_5 = \sum_{i=0}^{5} a_i b_{5-i} = a_5 b_0 + a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_4 + a_0 b_5$$
$$= 0 \times 1 + 0 \times (-7) + 3 \times 1 + 4 \times 0 + 0 \times 0 + 5 \times 0$$
$$= 3$$

$a_0 = 5$	$b_0 = 1$
$a_1 = 0$	$b_1 = -7$
$a_2 = 4$	$b_2 = 1$
$a_3 = 3$	$b_3 = 0$
$a_4 = 0$	$b_4 = 0$
$a_5 = 0$	$b_5 = 0$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(PQ)(x) = \sum_{k=0}^{5} c_k x^k$$
$$= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5$$
$$= 5 - 35x + 9x^2 - 25x^3 - 17x^4 + 3x^5$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$(-2P)(x) = -2 \times P(x)$$
$$= -2(3x^3+4x^2+5)$$
$$= -6x^3-8x^2-10$$

$\deg(-2P)=3$ cela coïncide avec la question 2

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$$
$$= 3x^3+4x^2+5 + x^2-7x+1$$
$$= 3x^3+5x^2-7x+6$$

$\deg(P+Q)=3 \leq 3$ cela coïncide avec la question 2

$$(PQ)(x) = P(x) \times Q(x)$$
$$= (3x^3+4x^2+5)(x^2-7x+1)$$
$$= 3x^5-21x^4+3x^3+4x^4-28x^3+4x^2+5x^2-35x+5$$
$$= 3x^5-17x^4-25x^3+9x^2-35x+5$$

- $\deg(PQ)=5$: cela coïncide avec la question 2
- la formule coïncide avec celle trouvée en question 3

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,-1\}$. On a :

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1} = \frac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+c(x-1)x}{x(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{ax^2+ax+bx^2-b+cx^2-cx}{x(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x-1)(x+1)}$$

Donc,

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ -b-2c=0 \\ b=-2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1$$

$$\iff \begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=-2 \end{cases}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$,

$$\frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)$$

$$= \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}$$ par télescopage

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

Exercice 4

1. Soit $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\begin{cases} r + s = -2 \\ r \times s = -15 \end{cases}$$

Alors r et s sont les racines du polynôme suivant :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - (r+s)x + r \times s$
$$= x^2 + 2x - 15$$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par :

$$\frac{-2 + \sqrt{64}}{2} = \frac{-2+8}{2} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{-2-\sqrt{64}}{2} = \frac{-2-8}{2} = -5$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par :

$$\mathcal{S} = \{ (3, -5), (-5, 3) \}$$

Vérification : $\begin{cases} 3 \times (-5) = -15 \\ 3 - 5 = -2 \end{cases}$

2. Notons s l'âge de Sophie et m l'âge de Marc.

D'après l'énoncé, (s,m) est solution de :

$$\begin{cases} s+m = 28 \\ s\times m = 192 \\ m > s \end{cases}$$

Alors m et s sont les racines du polynôme suivant :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - (m+s)x + m\times s$

$= x^2 - 28x + 192$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = (-28)^2 - 4\times 192 = 784 - 768 = 16$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par :

$$\frac{-(-28)+\sqrt{16}}{2} = \frac{28+4}{2} = 16 \quad \text{et} \quad \frac{-(-28)-\sqrt{16}}{2} = \frac{28-4}{2} = 12$$

Comme $m > s$, nécessairement

$m = 16$ et $s = 12$

3. Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = 5 \\ \ln x \times \ln y = 4 \end{cases}$$

Déjà, ce système a du sens seulement pour $x > 0$ et $y > 0$.

Pour $x, y > 0$, posons $r = \ln x$ et $s = \ln y$.

Ainsi, r et s vérifient

$$\begin{cases} r + s = 5 \\ r\times s = 4 \end{cases}$$

Alors r et s sont les racines du polynôme suivant :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^2 - (r+s)x + r\times s$

$= x^2 - 5x + 4$

Comme P est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 4 = 25 - 16 = 9$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux racines réelles données par :

$$\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

Ainsi, on a deux possibilités :

- soit $r = 4$ et $s = 1$
  c-à-d $\ln x = 4$ et $\ln y = 1$
  c-à-d $x = e^4$ et $y = e^1$
- soit $r = 1$ et $s = 4$
  c-à-d $x = e^1$ et $y = e^4$ de la même manière

Donc l'ensemble des solutions est donné par :

$$\{(e^4, e^1), (e^1, e^4)\}$$

Exercice 5

On considère le polynôme P donné par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 3x^3 - x - 2$

0. Comme P est de degré 3, il peut admettre au plus trois racines distinctes.

1. On a :
$P(1) = 3 \times 1^3 - 1 - 2 = 0$
donc 1 est <u>une</u> racine de P.

2. On cherche un polynôme Q tq
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)Q(x)$

- Alors nécessairement, Q est un polynôme de degré 2
donc on peut le chercher sous la forme
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax^2 + bx + c$
avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x-1)Q(x) &= (x-1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ &= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$P(x) = (x-1)Q(x)$
si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$\begin{cases} a = 3 \\ -a + b = 0 \\ -b + c = -1 \\ -c = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

3. D'après la Question 2, on a

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)\,Q(x)$
$= (x-1)(3x^2+3x+2)$

Donc il reste seulement à regarder les racines de Q.

Comme Q est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 2 = 9 - 24 = -15$
- comme $\Delta < 0$, le polynôme Q n'admet pas de racines réelles.

Donc P admet seulement 1 comme racine réelle.

4. On utilise la forme factorisée de P pour dresser son tableau de signe.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2+3x+2$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	

} car le polynôme Q n'admet pas de racine réelle et son coefficient dominant est positif

Donc $P \geqslant 0$ sur $[1;+\infty[$

et $P \leqslant 0$ sur $]-\infty, 1]$

Exercice 6

On considère le polynôme P donné par :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

0. Comme P est de degré 3, il peut admettre au plus trois racines distinctes.

1. On a :

$P(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 6 = -8 - 8 + 10 + 6 = 0$

Donc -2 est <u>une</u> racine de P

2. On cherche un polynôme Q tq

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+2)\,Q(x)$

- Alors nécessairement, Q est un polynôme de degré 2 donc on peut le chercher sous la forme

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax^2 + bx + c$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ à déterminer.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(x+2)\,Q(x) &= (x+2)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+bx^2+cx+2ax^2+2bx+2c\\ &= ax^3+(2a+b)x^2+(2b+c)x+2c\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x+2)\,Q(x)$$

si et seulement si a, b, c sont solutions de

$$\begin{cases} a & = 1 \\ 2a + b & = -2 \\ 2b + c & = -5 \\ 2c & = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

3. D'après la Question 2, on a

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+2)\,Q(x)$
$= (x+2)(x^2-4x+3)$

Donc il reste seulement à factoriser Q.

Comme Q est un polynôme du second degré, pour trouver les racines, on peut étudier le discriminant :

- on a $\Delta = (-4)^2 - 4\times 3 = 16 - 12 = 4$
- comme $\Delta > 0$, le polynôme Q admet deux racines réelles données par

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$Q(x) = (x-3)(x-1)$$

et $P(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff (x+2)(x-1)(x-3) = 0 \\ &\iff x+2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \text{ ou } x-3 = 0 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

Donc P admet exactement trois racines distinctes, données par -2, 1 et 3.

5. a) Soit $x>0$ (pour que l'équation soit licite) On a :

$(\ln x)^3-2(\ln x)^2-5\ln x+6=0 \iff P(\ln x)=0$

$\iff \ln x=-2$ ou $\ln x=1$ ou $\ln x=3$ d'après la question précédente

$\iff x=e^{-2}$ ou $x=e^{1}$ ou $x=e^{3}$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\{e^{-2}, e^{1}, e^{3}\}$$

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$e^{2x}-2e^{x}+6e^{-x}-5=0 \iff e^{3x}-2e^{2x}-5e^{x}+6=0$ en multipliant l'équation par e^{x}

$\iff (e^{x})^3-2(e^{x})^2-5e^{x}+6=0$

$\iff P(e^{x})=0$

$\iff \underbrace{e^{x}=-2}_{\text{impossible}}$ ou $e^{x}=1$ ou $e^{x}=3$ d'après la question précédente

$\iff x=\ln 1=0$ ou $x=\ln 3$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\{0, \ln 3\}$$

Exercice 7

On considère le polynôme P donné par :

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=x^5-4x^4+4x^3+2x^2-5x+2$

0. Comme P est de degré 5, il peut admettre au plus 5 racines distinctes.

1. Essayons de trouver des racines évidentes :

$P(0)=2 \rightsquigarrow 0$ n'est pas une racine

$P(1)=0 \rightsquigarrow 1$ est une racine

$P(-1)=0 \rightsquigarrow -1$ est une racine

$P(2)=0 \rightsquigarrow 2$ est une racine

$P(-2)=-84 \rightsquigarrow -2$ n'est pas une racine

Donc on sait déjà que P se factorise sous la forme

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=(x+1)(x-1)(x+2)Q(x)$

avec Q un polynôme de degré 2.

On cherche Q sous la forme

pour tout $x\in\mathbb{R}$, $Q(x)=ax^2+bx+c$

avec a, b, c à trouver.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$(x+1)(x-1)(x-2)\,Q(x) = ax^5 + (b-2a)x^4 + (c-2-a)x^3 + (2a-2c-b)x^2 + (2b-c)x + 2c$$ après calculs
$$= P(x)$$

Par identification, on doit avoir :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-2a = -4 \\ c-2-a = 4 \\ 2a-2c-b = 2 \\ 2b-c = -5 \\ 2c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$ (après calculs)

Donc

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

et $P(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x^2-2x+1)$

Pour finir de factoriser P, il faut factoriser Q.

Comme Q est un polynôme de degré 2, on peut regarder le discriminant.

Ou ici, on peut reconnaître directement une identité remarquable

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

(2) Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = (x+1)(x-1)^3(x-2)$$

et donc P admet exactement -1, 1 et 2 comme racines.

Exercice 8

1. Effectuons la division euclidienne de A par B où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + x + 1$.

On cherche Q et R tels que

$A = B \times Q + R$ avec $\deg R < \deg B = 1$

Donc Q et R sont nécessairement de degré 1,

on les cherche sous la forme

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = ax + b$ avec a, b, c, d à trouver

$R(x) = cx + d$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
A(x) &= B(x) \times Q(x) + R(x) \\
&= (x^2+x+1)(ax+b) + cx+d \\
&= ax^3 + bx^2 + ax^2 + bx + ax + b + cx + d \\
&= ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+c)x + b+d
\end{aligned}$$

Par identification, on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \\ a+b+c = 0 \\ b+d = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = x-1$ (quotient de la division euclidienne)

$R(x) = 2$ (reste de la division euclidienne)

2. En faisant comme à la question 1, on trouve

$$A = B \times Q + R$$

avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 6$

$R(x) = -4x - 20$