

TD 09 – LOGIQUE

Exercice 1 – Soit $A = \{26, 13, 5, 28\}$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. $\forall k \in A, k \leq 30$ | 4. $\exists k \in A, k$ est pair |
| 2. $\exists k \in A, k \leq 30$ | 5. $\exists k \in A, k$ est un multiple de 4 |
| 3. $\forall k \in A, k$ est pair | 6. $\exists k \in A, \forall n \in A, k \leq n$ |

Exercice 2 – Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les affirmations vraies et donner un contre-exemple pour les affirmations fausses.

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 2$ | 5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 1$ |
| 2. $\exists n \in \mathbb{N}, 2 < n < 5$ | 6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$ |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ | 7. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = 1$ |
| 4. $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$ | 8. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$ |

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire à l’aide des quantificateurs les propositions suivantes.

1. Il existe un nombre réel supérieur ou égal à 2.
2. L’équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .
3. L’équation $f(x) = 0$ n’a pas de solution sur \mathbb{R} .
4. Tous les nombres réels positifs sont le carré d’au moins un nombre réel.
5. Certains nombres réels sont strictement supérieurs à leur carré.
6. La fonction f ne prend pas de valeur négative.

Exercice 4 – Écrire la négation des propositions suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall x \in I, x \geq 18$ | 5. $\exists x \in C, (x \notin A \text{ et } x \in F)$ |
| 2. $\exists x \in I, x \geq 18$ | 6. $\forall z \in [1, 10[, g(z) > f(z)$ |
| 3. $\exists y \in]-\infty, 2], h(y) = 0$ | 7. $\forall z \in B, (z \notin F \Rightarrow z \in A)$ |
| 4. $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$ | 8. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x - y < 1$ |

Exercice 5 – Réécrire sous la forme “Si ... alors ...” (\Rightarrow) les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses.

1. Pour être un multiple de 6, il est nécessaire d’être un multiple de 3.
2. Pour être un multiple de 6, il est suffisant d’être un multiple de 3.
3. Pour que $x + 2 \geq 3$, il faut que x soit positif ou nul.
4. Pour que $x + 2 \geq 3$, il suffit x soit positif ou nul.

Exercice 6 – Soient x et y deux nombres réels. Donner la réciproque et la contraposée des propositions suivantes.

1. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$
2. $x \notin [1, 2[\Rightarrow (x < 1 \text{ ou } x^2 \geq 4)$

Exercice 7 – Soient a et b des nombres réels et x un nombre réel non nul. Relier les propositions \mathcal{P} et \mathcal{Q} suivantes avec le bon connecteur logique, soit “donc” soit “ \Leftrightarrow ”, pour que l’assertion finale soit vraie.

\mathcal{P}	Connecteur logique	\mathcal{Q}
$x = 3$		$x^2 = 9$
$x \geq 2$		$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$
$a > 0$ et $b > 0$		$ab > 0$
$e^x = 1$		$x = 0$
$x > 1$		$\ln(x)$ existe
$a \geq 0$		$\sqrt{a^2} = a$