Devoir surveillé 2

Vendredi 13 octobre 2023
Durée : 4h

*Pour ce devoir, des **points** vous seront **retirés** si :*

- *les résultats finaux des questions ne sont pas mis en valeur (encadrés, soulignés, surlignés,...),*
- *la rédaction de vos réponses ne commence pas par les phrases indiquées par le sujet,*
- *les résultats ne sont pas assez justifiés,*
- *la copie n'est pas assez soignée.*

*Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité. L'utilisation de la **calculatrice** ou de tout matériel électronique est **interdite**. Aucun document n'est autorisé.*

Exercice 1 – Calculs de sommes. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} 3$ ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \frac{2k+3}{7}$ iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{2k+3}$ iv) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n} (k-1)(k+1)$

> *Le calcul des sommes i) et ii) devra commencer par : « On a... »*

> *Le calcul des sommes iii) et iv) devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}$. On a... »*

Exercice 2 – Étude de fonctions. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

> *Votre réponse devra commencer par : « La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car ... »*

2. Calculer les quantités suivantes :

i) $f(0)$ ii) $f(\ln(2))$ iii) $f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

> *Votre réponse devra commencer par : « On a ... »*

3. Montrer que f est ni paire, ni impaire.
4. Montrer que f est majorée par 8 et minorée par 0.

> *Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ...»*

5. La fonction f est-elle bornée ? *Justifier.*
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$8 - f(x) = f(-x).$$

> *Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ...»*

Exercice 3 – Systèmes linéaires. On considère les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & -5 \\ x & - & 4y & + & 2z & = & 7 \\ -2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Dans un premier temps, **sans faire de calculs**, indiquer le nombre possible de solution pour les deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2). *Justifier votre réponse.*
2. Dans un second temps, résoudre ces systèmes grâce à la méthode du pivot de Gauss. Il est demandé d'**indiquer** à chaque étape les **opérations** faites sur le système. On donnera à la fin l'ensemble des solutions de chaque système.

Votre réponse devra commencer par : « En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on a... »

Exercice 4 – Manipulation d'inégalités. Dans cet exercice, on vous demande de prouver des inégalités. **Chaque ligne** de calcul (c'est-à-dire chaque manipulation de l'inégalité) devra être soigneusement **justifiée** par un argument adéquat.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x > 0$. On a ...»

2. Montrer que pour tout $a, b > 0$ avec $a \neq b$, on a
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$. On a ...»

3. Montrer que pour tout $x, y > 0$, on a
$$\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soient $x, y > 0$. On a ...»

Exercice 5 – Calcul d'une somme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

Votre réponse devra commencer par : « On a ... »

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$k \times k! = (k+1)! - k!$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

3. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

4. Vérifier que la formule donnée en Question 3 coincide avec les résultats de la Question 1.

Exercice 6 – Étude de fonction. On considère les fonctions c et s définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{c}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{s}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Justifier que les fonctions c et s sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les quantités suivantes :

   i) $\mathrm{c}(0)$ ii) $\mathrm{s}(0)$ iii) $\mathrm{c}(\ln(3))$ iv) $\mathrm{s}(\ln(7))$

Votre réponse devra commencer par : « On a ... »

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln(x).$$

   Les fonctions $\mathrm{c} \circ f$ et $f \circ \mathrm{c}$ sont-elles bien définies ? Si oui, donner leur(s) expression(s).
4. Montrer que la fonction c est paire et que la fonction s est impaire.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

5. Résoudre l'équation $\mathrm{s}(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

6. Démontrer que la fonction s est croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Démontrer que la fonction c n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
8. En utilisant les Questions 5 et 6, dresser le tableau de signe de la fonction s.
9. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{c}(x) > \mathrm{s}(x)$.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

10. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{c}(x))^2 - (\mathrm{s}(x))^2 = 1$.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

11. Parmi les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentée en Figure 1, laquelle est la courbe représentative de la fonction c et laquelle est la courbe représentative de la fonction s ? Justifier votre réponse.

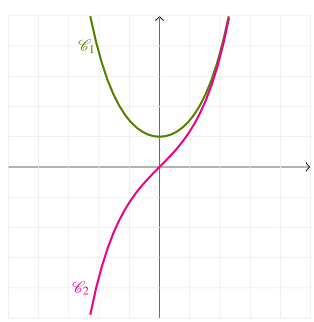

Figure 1: Représentation graphique des deux fonctions s et c

Exercice 7 – Calcul d'une autre somme (encore...). Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note

$$U_j = \sum_{i=0}^{j-1} i.$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.

Votre réponse devra commencer par : « On a ... »

2. Calculer U_j pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

3. En déduire l'expression de la somme suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{j}.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

4. En déduire l'expression de la somme double suivante

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j}.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

Exercice 8 – Python.

1. Écrire les opérations suivantes avec la **syntaxe Python**. *On ne demande pas d'effectuer les calculs.*

$$\text{i) } \frac{1,2+7}{5\times 3^{-12}}, \qquad \text{ii) } \frac{\sqrt{3+2^2}}{\pi} \qquad \text{iii) } \ln(1+\exp(3))$$

2. Noter dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables.

```
1 a,b = 3,4
2 a = 2 * b - 1
3 b = 3 * a
4 a = a - 5
```

	a	b
Ligne 1		
Ligne 2		
Ligne 3		
Ligne 4		

3. Noter dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables, et s'il y a un affichage, écrire la valeur affichée ou faire une croix sinon.

```
1 x = 5
2 y = x * 3
3 print(y)
4 print(x + 7)
5 print(x ** 2)
6 y = x
7 x != y
```

	x	y	Affichage
Ligne 1			
Ligne 2			
Ligne 3			
Ligne 4			
Ligne 5			
Ligne 6			
Ligne 7			

4. Indiquer l'affichage en Python du programme suivant.

```
L = []
for k in range(4):
        L.append(k+2)
print(L)
```

5. Indiquer l'affichage en Python du programme suivant.

```
c = 0
L = [0, -1, 3]
for e in L:
        c=c+e
        print(c)
print(c)
```

6. Noter dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables, et s'il y a un affichage, écrire la valeur affichée ou faire une croix sinon.

```
1 L = [4, 5, "Oui"]
2 print(L * 2)
3 x = L[1]
4 print(x+2)
5 L.append(-1)
6 print(len(L))
7 L[2] = 0
8 print(L + [0,1, 2])
```

	L	x	Affichage
Ligne 1			
Ligne 2			
Ligne 3			
Ligne 4			
Ligne 5			
Ligne 6			
Ligne 7			
Ligne 8			