DEVOIR SURVEILLÉ 2

Vendredi 13 septembre 2023
Durée : 4h

Exercice 1 – Calculs de sommes. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} 3$ ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} \frac{2k+3}{7}$ iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{2k+3}$ iv) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n} (k-1)(k+1)$

Le calcul des sommes i) et ii) devra commencer par : « On a... »

Le calcul des sommes iii) et iv) devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}$. On a... »

i) On a :

$$\sum_{k=1}^{20} 3 = 3\times(20-1+1) = 3\times 20 = 60.$$

ii) On a :

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{2k+3}{7} = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{15}(2k+3) = \frac{1}{7}\left(\sum_{k=1}^{15} 2k + \sum_{k=1}^{15} 3\right) = \frac{1}{7}\left(2\sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 3\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\cancel{2}\times\frac{15\times 16}{\cancel{2}} + 3\times(15-\cancel{1}+\cancel{1})\right) = \frac{1}{7}(15\times16+3\times15) = \frac{15}{7}(16+3) = \frac{15}{7}\times 19 = \frac{285}{7}$$

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} 3^{2k+3} = \sum_{k=0}^{n} (3^2)^k \times 3^3 = 27\times\sum_{k=0}^{n} 9^k = 27\times 9^0 \times \frac{1-9^{n-0+1}}{1-9} = 27\times\frac{1-9^{n+1}}{-8} = -\frac{27}{8}\times(1-9^{n+1})$$

iv) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=5}^{n} (k-1)(k+1) = \sum_{k=5}^{n}(k^2-1) = \sum_{k=5}^{n} k^2 - \sum_{k=5}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{4} k^2 - \sum_{k=5}^{n} 1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4\times5\times9}{6} - (n-5+1) = \frac{(n^2+n)(2n+1) - 180 - 6(n-4)}{6}$$

$$= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n-180-6n+24}{6} = \frac{2n^3+3n^2-5n-156}{6}$$

Exercice 2 – Étude de fonctions. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8}{1+e^{-x}}$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Votre réponse devra commencer par : « La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car ... »

2. Calculer les quantités suivantes :

$$\text{i) } f(0), \qquad \text{ii) } f(\ln(2)), \qquad \text{iii) } f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Votre réponse devra commencer par : « On a ... »

3. Montrer que f est ni paire, ni impaire.
4. Montrer que f est majorée par 8 et minorée par 0.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ...»

5. La fonction f est-elle bornée ? *Justifier.*
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$8 - f(x) = f(-x).$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ...»

1. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+e^{-x} \neq 0$
car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $1+e^{-x} > 0$.

2. On a

i) $f(0) = \frac{8}{1+e^{-0}} = \frac{8}{2} = 4$

ii) $f(\ln 2) = \frac{8}{1+e^{-\ln 2}} = \frac{8}{1+e^{\ln(1/2)}} = \frac{8}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{3}{2}}$
$= 8 \times \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

iii) $f(\ln(\frac{1}{2})) = f(-\ln 2) = \frac{8}{1+e^{\ln 2}} = \frac{8}{1+2} = \frac{8}{3}$

3. En utilisant la question 2, on a
- $f(\ln 2) \neq f(-\ln 2)$ donc la fonction f n'est pas paire
- $f(\ln 2) \neq -f(-\ln 2)$ donc la fonction f n'est pas impaire

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$e^{-x} > 0$
donc $1+e^{-x} > 0$.
On a aussi $8 \geq 0$
donc $f(x) \geq 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
donc la fonction f est minorée par 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$e^{-x} > 0$
donc $1+e^{-x} \geq 1$
donc $\frac{1}{1+e^{-x}} \leq 1$ car tous les termes sont ≥ 0 et car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
donc $\frac{8}{1+e^{-x}} \leq 8$ car $8 \geq 0$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 8$.
Donc la fonction f est majorée par 8.

5. D'après la question 4, la fonction f est majorée et minorée donc elle est bornée.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$8 - f(-x) = 8 - \frac{8}{1+e^{x}}$
$= \frac{8(1+e^x)-8}{1+e^x}$
$= \frac{\cancel{8}+8e^x-\cancel{8}}{1+e^x}$
$= \frac{(8e^x)\times e^{-x}}{(1+e^x)\times e^{-x}}$
$= \frac{8}{e^{-x}+1}$
$= f(x).$

Exercice 3 – Systèmes linéaires. On considère les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} -x + 2y - z = -5 \\ x - 4y + 2z = 7 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

1. Dans un premier temps, **sans faire de calculs**, indiquer le nombre possible de solution pour les deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2). *Justifier votre réponse.*
2. Dans un second temps, résoudre ces systèmes grâce à la méthode du pivot de Gauss. Il est demandé d'**indiquer** à chaque étape les **opérations** faites sur le système. On donnera à la fin l'ensemble des solutions de chaque système.

Votre réponse devra commencer par : « En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on a... »

1. (S_1) est un système linéaire non homogène avec autant d'équations que d'inconnues (3) donc il admet
   - soit aucune solution
   - soit une unique solution
   - soit une infinité de solution

(S_2) est un système linéaire homogène donc il admet au moins $(0,0,0)$ comme solution. De plus, il possède autant d'équations que d'inconnues (3). Donc finalement, il admet
- soit une unique solution
- soit une infinité de solution

---

2. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on a

$$(S_1) \iff \begin{cases} x - 4y + 2z = 7 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ -x + 2y - z = -5 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 4y + 2z = 7 \\ -2y + z = 2 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -10y + 6z = 14 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 4y + 2z = 7 \\ -2y + z = 2 \\ z = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 4y + 2z = 7 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions de ce système est donné par

$$\mathcal{S} = \{(3,1,4)\}$$

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on a

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y - z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ \quad -2y + 2z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \quad \cancel{0 = 0} & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Il y a plus d'inconnues que d'équations
On choisit deux inconnues principales, par ex x et y
que l'on exprime en fct de l'inconnue restante z

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S} = \{ (0, z, z) \ ; \ z \in \mathbb{R} \}$$

Exercice 4 – Manipulation d'inégalités. Dans cet exercice, on vous demande de prouver des inégalités. **<u>Chaque ligne</u>** de calcul (c'est-à-dire chaque manipulation de l'inégalité) devra être soigneusement **<u>justifiée</u>** par un argument adéquat.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $x > 0$. On a ...»

2. Montrer que pour tout $a, b > 0$ avec $a \neq b$, on a
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$. On a ...»

3. Montrer que pour tout $x, y > 0$, on a
$$\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soient $x, y > 0$. On a ...»

1. Soit $x>0$. On a

$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \iff x \times \left(x + \frac{1}{x}\right) \geqslant x \times 2$ car $x>0$

$\iff x^2 + 1 \geqslant 2x$ en effectuant le calcul

$\iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ en mettant tout à gauche

$\iff (x-1)^2 \geqslant 0$

Or la dernière inégalité est toujours vraie pour $x>0$. Donc

pour tout $x>0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

2. Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$. On a

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \iff a \times b \times \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) > a \times b \times 2$ car $a>0, b>0$ donc $ab>0$

$\iff a^2 + b^2 > 2ab$

$\iff a^2 - 2ab + b^2 > 0$

$\iff (a-b) > 0$

Or, comme $a - b \neq 0$, la dernière inégalité est toujours vraie.

Donc pour tout $a, b > 0$, $a \neq b$, on a $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

3. Soient $x, y > 0$. On a

$\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff \left(\sqrt{x+y}\right)^2 < \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$

car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et car tous les termes sont bien positifs.

$\iff \cancel{x} + \cancel{y} < \cancel{x} + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \cancel{y}$

$\iff 2\sqrt{xy} > 0$

Or, comme $x>0$ et $y>0$, $xy>0$ donc la dernière inégalité est toujours vraie.

Donc, pour tout $x, y > 0$, $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 5 – Calcul d'une somme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.

Votre réponse devra commencer par : « On a ... »

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$k \times k! = (k+1)! - k!$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $k \in \mathbb{N}$. On a ... »

3. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

4. Vérifier que la formule donnée en Question 3 coïncide avec les résultats de la Question 1.

1. On a

- $S_1 = \sum_{k=1}^{1} (k \times k!) = 1 \times 1! = 1$
- $S_2 = \sum_{k=1}^{2} k \times k! = 1 \times 1! + 2 \times 2! = 1 + 2 \times 2 = 5$
- $S_3 = \sum_{k=1}^{3} k\, k! = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! = 1 + 4 + 3 \times 1 \times 2 \times 3 = 23$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}(k+1)! - k! &= (k+1) \times k! - k! \\ &= k! \times (k+1-1) \\ &= k! \times k \\ &= k \times k!\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} k \times k! \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k! \quad \text{en utilisant la question 2} \\ &= \cancel{2!} - 1! + \cancel{3!} - \cancel{2!} + \cancel{\ldots} + (n+1)! - \cancel{n!} \\ &= (n+1)! - 1! \quad \text{(télescopage)} \\ &= (n+1)! - 1\end{aligned}$$

4. Avec la formule de la question 3, on obtient

- $S_1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$
- $S_2 = (2+1)! - 1 = 3! - 1 = 6 - 1 = 5$
- $S_3 = (3+1)! - 1 = 4! - 1 = 24 - 1 = 23$

Cela coïncide avec les résultats obtenus en question 1.

Exercice 6 – Étude de fonction. On considère les fonctions c et s définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{c}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{s}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Justifier que les fonctions c et s sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les quantités suivantes :

   i) $\mathrm{c}(0)$, ii) $\mathrm{s}(0)$, iii) $\mathrm{c}(\ln(3))$, iv) $\mathrm{s}(\ln(7))$.

   Votre réponse devra commencer par : « On a ... »

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

   $$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \ln(x).$$

   Les fonctions $\mathrm{c} \circ f$ et $f \circ \mathrm{c}$ sont-elles bien définies ? Si oui, donner leur(s) expression(s).
4. Montrer que la fonction c est paire et que la fonction s est impaire.

   Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

5. Résoudre l'équation $\mathrm{s}(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

6. Démontrer que la fonction s est croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Démontrer que la fonction c n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
8. En utilisant les Questions 5 et 6, dresser le tableau de signe de s.
9. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{c}(x) > \mathrm{s}(x)$.

   Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

10. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\mathrm{c}(x))^2 - (\mathrm{s}(x))^2 = 1$.

    Votre réponse devra commencer par : « Soit $x \in \mathbb{R}$. On a ... »

11. Parmi les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentée en Figure 1, laquelle est la courbe représentative de la fonction c et laquelle est la courbe représentative de la fonction s. Justifier votre réponse.

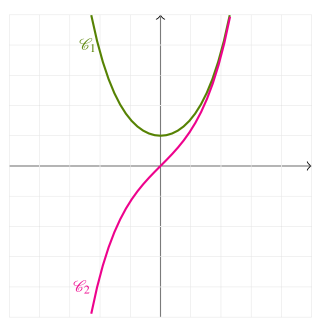

Figure 1: Représentation graphique des deux fonctions s et c

1. la fonction $x \mapsto e^x$ est bien définie sur $\mathbb{R}$
donc la fonction $x \mapsto e^{-x}$ aussi.

Donc par opération les fonctions $x \mapsto e^x + e^{-x}$ et $x \mapsto e^x - e^{-x}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$. De plus, $2 \neq 0$ donc les fonctions c et s sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

2. i) On a

$$c(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

ii) On a

$$s(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

iii) On a

$$c(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 + e^{\ln(1/3)}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{10}{3}}{2} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$$

iv) On a

$$s(\ln 7) = \frac{e^{\ln 7} - e^{-\ln 7}}{2} = \frac{7 - \frac{1}{7}}{2} = \frac{\frac{48}{7}}{2} = \frac{24}{7}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c(x) \in \mathbb{R}_+^*$ car $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$
Donc la fonction $f \circ c$ est bien définie sur $\mathbb{R}$
et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f \circ c)(x) = f(c(x)) &= \ln(c(x)) \\ &= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\ &= \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \in \mathbb{R}$.
Donc la fonction $c \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$
et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(c \circ f)(x) = c(f(x)) = c(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2}$$

i.e. $(c\circ f)(x) = \dfrac{x + \frac{1}{x}}{2} = \dfrac{\frac{x^2+1}{x}}{2} = \dfrac{x^2+1}{2x}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$c(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = c(x)$$

Donc la fonction c est paire.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$s(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -s(x)$$

Donc la fonction s est impaire.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} s(x) = 0 &\iff \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = 0 \\ &\iff e^{x} - e^{-x} = 0 \\ &\iff e^{x} = e^{-x} \quad \text{) en appliquant ln} \\ &\iff x = -x \\ &\iff 2x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation $s(x) = 0$ admet une unique solution donnée par $x = 0$.

6. • la fonction $x \mapsto e^{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
• la fonction $x \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Donc par composition, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Donc la fonction, $x \mapsto -e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
• Donc par somme, la fct $x \mapsto e^{x} - e^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction s est croissante sur $\mathbb{R}$.

7. On a

$$c(-\ln 3) = c(\ln 3) \quad \text{par parité de } c \text{ (cf question 4)}$$
$$= \frac{5}{3} \quad \text{d'après la question 2-iii)}$$

et $c(0) = 1$ d'après la question 2-i)

Donc $-\ln 3 \leq 0$ mais $c(-\ln 3) > c(0)$

Donc la fonction c n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

8.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
s		$-$	0	$+$	

d'après la question 5, s ne s'annule que en $x=0$

car $s(0)=0$ (question 2 iii) et s croissante sur $\mathbb{R}$ (question 6) donc pour tout $x \geq 0$, $s(x) \geq s(0) = 0$

raisonnement similaire

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$c(x) > s(x) \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\iff \cancel{e^x} + e^{-x} > \cancel{e^x} - e^{-x} \quad \text{en multipliant par } 2>0$$

$$\iff 2e^{-x} > 0$$

Or la dernière inégalité est toujours vraie par propriété sur l'exp

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c(x) > s(x)$

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$c(x)^2 - s(x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - (\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}})}{4}$$

$$= 1.$$

11. $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction c car

- $c(0) = 1$
- c est paire
- c n'est pas croissante
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c(x) > s(x)$

$\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction s car

- $s(0) = 0$
- s est impaire
- s est croissante
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c(x) > s(x)$

Exercice 7 – Calcul d'une autre somme (encore...). Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note

$$U_j = \sum_{i=0}^{j-1} i.$$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.

Votre réponse devra commencer par : « On a ... »

2. Calculer U_j pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Votre réponse devra commencer par : « Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

3. En déduire l'expression de la somme suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{j}.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

4. En déduire l'expression de la somme double suivante

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j}.$$

Votre réponse devra commencer par : « Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a ... »

1. On a :

- $U_1 = \sum_{i=0}^{0} i = 0$
- $U_2 = \sum_{i=0}^{1} i = 0 + 1 = 1$
- $U_3 = \sum_{i=0}^{2} i = 0 + 1 + 2 = 3$

2. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$U_j = \sum_{i=0}^{j-1} i = \frac{(j-1)j}{2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cancel{j}} \times \frac{(j-1)\cancel{j}}{2}$$ en utilisant la question 2

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - (n-1+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)-2n}{2}\right)$$

$$= \frac{n(n-1)}{4}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{j}$$

$$= \frac{n(1-n)}{4}$$

en utilisant la question 3

Exercice 8 – Python.

1. Écrire les opérations suivantes avec la **syntaxe Python**. *On ne demande pas d'effectuer les calculs.*

$$\text{i) } \frac{1{,}2+7}{5\times 3^{-12}}, \qquad \text{ii) } \frac{\sqrt{3+2^2}}{\pi} \qquad \text{iii) } \ln(1+\exp(3))$$

2. Noter dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables.

```
1 a,b = 3,4
2 a = 2 * b - 1
3 b = 3 * a
4 a = a - 5
```

	a	b
Ligne 1	3	4
Ligne 2	7	4
Ligne 3	7	21
Ligne 4	2	21

3. Noter dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables, et s'il y a un affichage, écrire la valeur affichée ou faire une croix sinon.

```
1 x = 5
2 y = x * 3
3 print(y)
4 print(x + 7)
5 print(x ** 2)
6 y = x
7 x != y
```

	x	y	Affichage
Ligne 1	5	-	-
Ligne 2	5	15	-
Ligne 3	5	15	15
Ligne 4	5	15	12
Ligne 5	5	15	25
Ligne 6	5	5	-
Ligne 7	5	5	False

4. Indiquer l'affichage en Python du programme suivant.

```
L = []
for k in range(4):
        L.append(k+2)
print(L)
```

le programme affiche

L = [2,3,4,5]

5. Indiquer l'affichage en Python du programme suivant.

```
c = 0
L = [0, -1, 3]
for e in L:
        c=c+e
        print(c)
print(c)
```

le programme affiche

0
-1
2
2

6. Noter dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables, et s'il y a un affichage, écrire la valeur affichée ou faire une croix sinon.

```
1 L = [4, 5, "Oui"]
2 print( L * 2)
3 x = L[1]
4 print(x+2)
5 L.append(-1)
6 print(len(L))
7 L[2] = 0
8 print(L + [0,1, 2])
```

	L	x	Affichage
Ligne 1	[4, 5, "Oui"]	-	-
Ligne 2	[4, 5, "Oui"]	-	[4, 5, "Oui", 4, 5, "Oui"]
Ligne 3	[4, 5, "Oui"]	5	-
Ligne 4	[4, 5, "oui"]	5	7
Ligne 5	[4, 5, "Oui", -1]	5	-
Ligne 6	[4, 5, "oui", -1]	5	4
Ligne 7	[4, 5, 0, -1]	5	-
Ligne 8	[4, 5, 0, -1]	5	[4, 5, 0, -1, 0, 1, 2]

1) i) `(1.2+7)/(5*3**(-12))`

ii)
```
import numpy as np
np.sqrt(3+2**2)/np.pi
```

iii)
```
import numpy as np
np.log(1+np.exp(3))
```

2)-6) réponse sur le sujet