

TD 06 – SOMMES & PRODUITS

Sommes

Exercice 1 – Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Écrire les sommes suivantes à l'aide des \dots (on ne demande pas de calculer ces sommes).

$$1) \sum_{k=1}^{20} k^3 \qquad 2) \sum_{\ell=2}^8 \exp(\ell + 1) \qquad 3) \sum_{i=1}^n (-1)^i \qquad 4) \sum_{j=2}^{n+1} \ln(j - 1)$$

Exercice 2 – Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole \sum .

$$1) 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 50$$

$$2) 1 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + \dots + (n + 1)^6 \text{ (pour un } n \in \mathbb{N}^* \text{ donné)}$$

$$3) 1 - a + a^2 - a^3 + \dots + a^{100} \text{ (pour un } a \in \mathbb{R}^* \text{ donné)}$$

Exercice 3 – **Sommes de références.** En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

$$1) \sum_{i=0}^n 4i \qquad 5) \sum_{k=2}^{n+1} 3 \qquad 9) \sum_{j=1}^{n-1} 2^j$$

$$2) \sum_{\ell=4}^n \frac{\ell-1}{4} \qquad 6) \sum_{k=0}^n x^{2k+1} \qquad 10) \sum_{i=1}^{2N} i(2i + 3)$$

$$3) \sum_{j=1}^n e^{-j} \qquad 7) \sum_{k=0}^n \frac{3}{10^k} \qquad 11) \sum_{k=13}^{42} k$$

$$4) \sum_{\ell=4}^{n+1} \frac{2^\ell}{3^{\ell-2}} \qquad 8) \sum_{j=1}^{n-1} (5j + 2 - n) \qquad 12) \sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$$

Exercice 4 – **Sommes de références.** En se ramenant aux sommes de référence du cours, calculer les sommes suivantes.

$$1) 2 + 4 + 6 + \dots + 100 \qquad 3) 1 + 3 + 5 + \dots + 99$$

$$2) 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n \qquad 4) 2 \times 5^2 + 2 \times 5^3 + \dots + 2 \times 5^{2n+2}$$

Exercice 5 – **Preuve de la somme des entiers au carré.** Démontrer *par récurrence* que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On pourra s'appuyer sur la démonstration de la Proposition 1.8 faite en classe.

Exercice 6 – **Somme télescopique.**

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, on a

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 7 – **Sommes télescopiques.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) \qquad \sum_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}}$$

Indication : faire apparaître un télescopage (pour la première somme, en utilisant les propriétés algébriques du logarithme, pour la deuxième somme, en multipliant par la quantité conjuguée.)

Exercice 8 – Adapté de ECRICOME 2023. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$p_j = \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} \times \frac{2j}{k(k+1)}$$

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

2. En déduire que, pour tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$p_j = \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$$

3. Montrer que

$$\sum_{j=1}^n j \times p_j = \frac{n+2}{3}$$

Exercice 9 – Changements d'indices. À l'aide d'un changement d'indice, ré-écrire autrement les sommes suivantes (compléter les trous)

$$1) \sum_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \frac{i}{i-1} \quad 2) \sum_{i=0}^n 2^i = \sum_{k=1}^{\dots} \dots \quad 3) \sum_{i=2}^n (i-2) = \sum_{k=\dots}^{\dots} k$$

Exercice 10 – Sommes doubles. Calculer les sommes doubles suivantes :

$$1) S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (i+j). \quad 2) V = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j \quad 3) W = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x^{i+j} \text{ (pour un } x \in \mathbb{R})$$

Produit

Exercice 11 – Calculer les produits suivants. *On pourra écrire les produits en extension pour comprendre ce qui se passe.*

$$1) \prod_{i=0}^n 2 \quad 2) \prod_{k=1}^{n-1} 2^k \quad 3) \prod_{k=2}^n 3x \quad 4) \prod_{k=1}^n e^k$$

Exercice 12 – Calculer les produits suivants.

$$1) \prod_{k=13}^{56} \frac{k+1}{k} \quad 2) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

Indication : faire apparaître un télescope.

Factorielle

Exercice 13 – Écrire les nombres suivants en utilisant des factorielles :

$$1) 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9, \quad 3) 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) \\ 2) n(n-1)(n-2) \quad 4) 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)$$

Exercice 14 – Simplifier au maximum les quantités suivantes :

$$1) \frac{n!}{(n+1)!} \quad 2) \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \quad 3) (n+1)! + (n-1)!$$

Exercice 15 – Écrire les produits suivants grâce à une/plusieurs factorielle(s).

$$1) \prod_{j=1}^{n-1} j^2 \quad 2) \prod_{k=4}^n k^3$$