TD 06 – Sommes & Produits (bis) - Correction

Exercice 1 – Somme d'une constante. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 3 = 3 \times (10 - 1 + 1) = 3 \times 10 = 30$

2) $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{21} 5 = 5 \times (21 - 0 + 1) = 5 \times 22 = 110$

3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 \times (n - 1 + 1) = n$

4) $\displaystyle\sum_{j=n}^{n+10} 1 = 1 \times (n + 10 - n + 1) = 11$

5) $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} (-1) = (-1) \times (q - p + 1) = p - q - 1$

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x = x \times (n - 1 + 1) = nx$

Exercice 2 – Somme des entiers et des entiers au carré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k = \frac{6\times 7}{2} = 3 \times 7 = 21$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} k = \frac{6\times 7}{2} = 3 \times 7 = 21$

3) $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{10} \ell^2 = \frac{10\times 11\times 21}{6} = 5 \times 11 \times 7 = 385$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

5) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} k^2 = \frac{n^2\times(n^2+1)\times(2n^2+1)}{6}$

Exercice 3 – Somme des entiers et des entiers au carré mais il manque des termes.... Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 5$. Soient

$p,q \in \mathbb{N}^*$ avec $p < q$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{k=3}^{12} k = \sum_{k=1}^{12} k - 1 - 2 = \frac{12\times 13}{2} - 3 = 6\times 13 - 3 = 75$

2) $\sum_{k=5}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{4} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4\times 5\times 9}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 30$

3) $\sum_{j=100}^{200} j = \sum_{j=1}^{200} j - \sum_{j=1}^{99} j = \frac{200\times 201}{2} - \frac{99\times 100}{2} = 100\times 201 - 99\times 50 = 20100 - 4950 = 15150$

4) $\sum_{k=p}^{q} k = \sum_{k=1}^{q} k - \sum_{k=1}^{p-1} k = \frac{q\times(q+1)}{2} - \frac{(p-1)\times p}{2}$

Exercice 4 – Somme des entiers et des entiers au carré, enfin presque !. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes en utilisant la linéarité de la somme.

1) $\sum_{k=1}^{n} (5k) = 5\sum_{k=1}^{n} k = 5\times \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{k=0}^{n} (k-10) = \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 10 = \frac{n(n+1)}{2} - 10(n+1)$

3) $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} 1 = 2\times \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n + 2$

4) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (k+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$

5) $\sum_{k=5}^{n+1} (-k+1) = -\sum_{k=5}^{n+1} k + \sum_{k=5}^{n+1} 1 = -\left(\sum_{k=1}^{n+1} k - 1 - 2 - 3 - 4\right) + (n+1-5+1) = -\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 10 + n - 3$

Exercice 5 – Sommes géométriques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0 \times \frac{1-2^{n-0+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$

2) $\sum_{k=1}^{n} 4^k = 4^1 \times \frac{1-4^{n-1+1}}{1-4} = -\frac{4}{3}\times(1-4^n)$

3) $\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1-2+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\left(1-(\frac{1}{2})^n\right)$

4) $\sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = 1\times(n-0+1) = n+1$

Exercice 6 – Sommes géométriques un peu cachée.... Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant les règles suivantes sur les puissances, pour tout $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$,

$$x^{p+q} = x^p \times y^q \qquad x^{-p} = \frac{1}{x^p} \qquad \frac{1}{y^k} = \left(\frac{1}{y}\right)^k \qquad \frac{x^k}{y^k} = \left(\frac{x}{y}\right)^k \qquad x^{p\times k} = (x^p)^k$$

calculer les sommes suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-1/3} = \frac{3}{2} \times \left(1-(\frac{1}{3})^{n+1}\right)$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{2^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10-1+1}}{1-\frac{2}{3}} = 2 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)$

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} 2^{k+3} = \sum_{k=2}^{n+1} 2^k \times 2^3 = 2^3 \sum_{k=2}^{n+1} 2^k = 8 \times 2^2 \times \frac{1-2^{n+1-2+1}}{1-2} = 32 \times (2^n - 1)$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2k} = \sum_{k=1}^{n} \left(2^2\right)^k = \sum_{k=1}^{n} 4^k = 4^1 \times \frac{1-4^{n-1+1}}{1-4} = -\frac{4}{3}\left(1-4^n\right)$

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k \times 5^{-k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{3}{5} \times \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2} \times \left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$