TD 06 – Sommes & Produits (II)

Exercice 1 –

1. Déterminer les réels a, b, c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de la somme suivante,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 2 – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k \times k!)$.

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k \times k! = (k+1)! - k!$$

3. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
4. Vérifier que la formule donnée en Question 3 coïncide avec les résultats de la Question 1.

Exercice 3 – On note,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

1. Calculer S_1, S_2 et S_3. *Les résultats seront données sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles.*
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le signe de la quantité $S_{n+1} - S_n$.
3. Montrer que,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}.$$

4. Déterminer deux réels a et b tels que,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}$$

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, une expression simplifiée de la somme suivante

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

6. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2, \qquad S_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

Exercice 4 – Soit $n \in \mathbb{N}*$. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

En exprimant de deux façons différentes la dérivée de f, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Exercice 5 – Soient a et b deux réels. Conjecturer et démontrer une formule de factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.