TD 09 – Logique (Correction)

Quantificateurs

Exercice 1 – Soit $A = \{26, 13, 5, 28\}$. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall k \in A,\ k \leqslant 30$
2. $\exists k \in A,\ k \leqslant 30$
3. $\forall k \in A,\ k$ est pair
4. $\exists k \in A,\ k$ est pair
5. $\exists k \in A,\ k$ est un multiple de 4
6. $\exists k \in A,\ \forall n \in A,\ k \leqslant n$

Correction.

	Proposition	Vérité	Explication
1	$\forall k \in A,\ k \leqslant 30$	Vrai	Car $26, 13, 5$ et 28 sont tous $\leqslant 30$
2	$\exists k \in A,\ k \leqslant 30$	Vrai	Avec par exemple $k = 5$ (ou $k = 13$, ...)
3	$\forall k \in A,\ k$ est pair	Faux	Car, $k = 13 \in A$ n'est pas pair
4	$\exists k \in A,\ k$ est pair	Vrai	Avec par exemple $k = 26$
5	$\exists k \in A,\ k$ est un multiple de 4	Vrai	Avec par exemple $k = 28$
6	$\exists k \in A,\ \forall n \in A,\ k \leqslant n$	Vrai	Avec, par exemple $k = 5$

■

Exercice 2 – Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier les affirmations vraies et donner un contre-exemple pour les affirmations fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$
2. $\exists n \in \mathbb{N}, 2 < n < 5$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
4. $\forall x > 0,\ \exists y > 0,\ y < x$
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$
7. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$
8. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$

Correction.

	Proposition	Vérité	Explication
1	$\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$	Faux	Contre-ex : $x = 1$
2	$\exists n \in \mathbb{N}, 2 < n < 5$	Vrai	Par exemple, $n = 3$ (ou $n = 4$)
3	$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$	Faux	Contre-ex : $x = \frac{1}{2}$ car $x^2 = \frac{1}{4} < x = \frac{1}{2}$
4	$\forall x > 0,\ \exists y > 0,\ y < x$	Vrai	Soit $x > 0$. Il existe $y = \frac{x}{2} > 0$, tel que $y < x$.
5	$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$	Faux	Contre-ex : $x = y = 0$
6	$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$	Vrai	Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $y = 1 - x$ tel que $x + y = 1$.
7	$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$	Faux	(*)
8	$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 1$	Vrai	Par exemple, $x = 0$ et $y = 1$

(*) Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $x_0 + y = 1$. Alors, en prenant $y = 0$, on obtient $x_0 = 1$. Mais en prenant $y = 1$, on obtient $x_0 = 0$. Absurde. ■

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes.

1. Il existe un nombre réel supérieur ou égal à 2.
2. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
4. Tous les nombres réels positifs sont le carré d'au moins un nombre réel.
5. Certains nombres réels sont strictement supérieurs à leur carré.
6. La fonction f ne prend pas de valeur négative.

Correction.

	Proposition	Avec les quantificateurs
1	Il existe un nombre réel supérieur ou égal à 2.	$\exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$
2	L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.	$\exists! x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$
3	L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
4	Tous les nombres réels positifs sont le carré d'au moins un nombre réel.	$\forall x \geqslant 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ x = a^2$
5	Certains nombres réels sont strictement supérieurs à leur carré.	$\exists x \in \mathbb{R},\ x > x^2$
6	La fonction f ne prend pas de valeur négative.	$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$

■

Exercice 4 – Écrire la négation des propositions suivantes.

1. $\forall x \in I,\ x \geqslant 18$
2. $\exists x \in I,\ x \geqslant 18$
3. $\exists y \in]-\infty, 2],\ h(y) = 0$
4. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2 = 0)$
5. $\exists x \in C,\ (x \notin A$ et $x \in F)$
6. $\forall z \in [1, 10[,\ g(z) > f(z)$
7. $\forall z \in B,\ (z \notin F \Rightarrow z \in A)$
8. $\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ |x-y| < 1$

Correction.

	Proposition	Négation
1	$\forall x \in I,\ x \geqslant 18$	$\exists x \in I,\ x < 18$
2	$\exists x \in I,\ x \geqslant 18$	$\forall x \in I,\ x < 18$
3	$\exists y \in]-\infty, 2],\ h(y) = 0$	$\forall y \in]-\infty, 2],\ h(y) \neq 0$
4	$(\exists x \in \mathbb{R},\ x+1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x+2 = 0)$	$(\forall x \in \mathbb{R},\ x+1 \neq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R},\ x+2 \neq 0)$
5	$\exists x \in C,\ (x \notin A$ et $x \in F)$	$\forall x \in C,\ (x \in A$ ou $x \notin F)$
6	$\forall z \in [1, 10[,\ g(z) > f(z)$	$\exists z \in [1, 10[,\ g(z) \leqslant f(z)$
7	$\forall z \in B,\ (z \notin F \Rightarrow z \in A)$	$\exists z \in B,\ (z \notin F$ et $z \notin A)$
8	$\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ |x-y| < 1$	$\exists x \in \mathbb{Z},\ \forall y \in \mathbb{Z},\ |x-y| \geqslant 1$

■

Connecteurs logiques

Exercice 5 – Réécrire sous la forme “Si ... alors ...” ($\Rightarrow$) les propositions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausse.

1. Pour être un multiple de 6, il est nécessaire d'être un multiple de 3.
2. Pour être un multiple de 6, il est suffisant d'être un multiple de 3.
3. Pour que $x+2 \geqslant 3$, il faut que x soit positif ou nul.
4. Pour que $x+2 \geqslant 3$, il suffit x soit positif ou nul.

Correction.

	Proposition	Vérité	Explications
1	Si k est un multiple de 6 alors k est un multiple de 3	Vrai	Si $k = 6 \times q$ alors $k = 3 \times (2q)$
2	Si k est un multiple de 3 alors k est un multiple de 6	Faux	Contre-ex : 9 est multiple de 3 mais pas de 6
3	Si $x+2 \geqslant 3$ alors $x \geqslant 0$	Vrai	Si $x+2 \geqslant 3$ alors $x \geqslant 1 \geqslant 0$
4	Si $x \geqslant 0$ alors $x+2 \geqslant 3$	Faux	Contre-ex : $x = \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{2} \geqslant 0$ mais $\frac{1}{2}+2 < 3$

$\blacksquare$

Exercice 6 – Soient x et y deux nombres réels. Donner la réciproque et la contraposée des propositions suivantes.

1. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$
2. $x \notin [1,2[\Rightarrow (x < 1$ ou $x^2 \geqslant 4)$

Correction.

	Proposition	Réciproque	Contraposée
1	$xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$	$x \neq 0$ et $y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$	$x = 0$ ou $y = 0 \Rightarrow xy = 0$
2	$x \notin [1,2[\Rightarrow (x < 1$ ou $x^2 \geqslant 4)$	$(x < 1$ ou $x^2 \geqslant 4) \Rightarrow x \notin [1,2[$	$(x \geqslant 1$ et $x^2 < 4 \Rightarrow x \in [1,2[$

$\blacksquare$

Exercice 7 – Soient a et b des nombres réels et x un nombre réel non nul. Relier les propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ suivantes avec le bon connecteur logique, soit “donc” soit “$\Leftrightarrow$”, pour que l'assertion finale soit vraie.

Correction.

$\mathscr{P}$	Connecteur logique	$\mathscr{Q}$	Explications
$x = 3$	donc	$x^2 = 9$	Le sens $\Leftarrow$ est faux (contre-ex: $x = -3$ car $x^2 = 9$ mais $x \neq 3$)
$x \geqslant 2$	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}$	En utilisant la décroissante de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$a > 0$ et $b > 0$	donc	$ab > 0$	Le sens $\Leftarrow$ est faux (contre-ex : $a = -1$ et $b = -1$ car $ab = 1 > 0$ mais $a < 0$)
$e^x = 1$	$\Leftrightarrow$	$x = 0$	car $e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$
$x > 1$	donc	$\ln(x)$ existe	Le sens $\Leftarrow$ est faux (contre-ex : $x = \frac{1}{2}$ alors $ln(x)$ existe mais $x \leqslant 1$)
$a \geqslant 0$	$\Leftrightarrow$	$\sqrt{a^2} = a$	

$\blacksquare$