Mathématiques – ECG1 DM 1

DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – Soit m un nombre réel fixé. On considère le système à paramètre suivant :

$$(S_m) \begin{cases} -mx - 2y - 6z = 2\\ 3x - (5+m)y - 9z = 3\\ -x + y + (1-m)z = -1 \end{cases}$$

d'inconnus les triplets de réels $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

1. On suppose dans cette question que m = 1.

Réécrire le système (S_1) correspondant, puis le résoudre.

Corrigé:

Prenons m=1 et raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss

On intervertit les deux dernières lignes. Ainsi,

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y - 6z = 2\\ 3y + 6z = -3\\ - 12y - 27z = 9 & L_2 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

On finit d'échelonner. Ainsi,

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y - 6z = 2 \\ 3y + 6z = -3 \\ - 3z = -3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

Comme le système est échelonné, on le résout de bas en haut. On obtient alors,

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Le système admet donc une unique solution, donnée par,

$$(-2, -3, 1)$$

2. Dans le cas général, résoudre le système (S_m) selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbf{R}$.

Raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss.

$$(S_m) \begin{cases} -mx & - & 2y & - & 6z & = & 2 \\ 3x & - & (5+m)y & - & 9z & = & 3 \\ -x & + & y & + & (1-m)z & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x & + & y & + & (1-m)z & = & -1 \\ 3x & - & (5+m)y & - & 9z & = & 3 \\ -mx & - & 2y & - & 6z & = & 2 \end{cases} L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} -x & + & y & + & (1-m)z & = & -1 \\ & (-2-m)y & + & (-6-3m)z & = & 0 \\ & & (-2-m)y & + & (m^2-m-6)z & = & 2+m \end{cases} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$$

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} -x & + & y & + & (1-m)z & = & -1 \\ & (-2-m)y & + & (-6-3m)z & = & 0 \\ & & & (m^2+2m)z & = & 2+m \end{cases} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

 $m^2 + 2m$ s'annule pour m = 0 et pour m = -2

Mathématiques – ECG1 DM 1

On étudie donc les cas particuliers

1er cas: m = 0

$$(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = -1 \\ -2y - 6z = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Donc, pas de solution dans ce cas

2ème cas: m = -2

$$(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + 3z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système admet donc une infinité de solutions, données par,

$$(y+3z+1,y,z)$$
 pour tout $y,z \in \mathbb{R}$.

3ème cas: Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

$$(S_{m}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + (1-m)z = -1 \\ (-2-m)y + (-6-3m)z = 0 \\ z = \frac{2+m}{m^{2}+2m} \end{cases}$$

$$(S_{m}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + (1-m)z = -1 \\ (-2-m)y + (-6-3m)z = 0 \\ z = \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$(S_{m}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + (1-m)z = -1 \\ (-2-m)y + \frac{-6-3m}{m} = 0 \\ z = \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$(S_{m}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + (1-m)z = -1 \\ y = \frac{6+3m}{m(-2-m)} \\ z = \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$(S_{m}) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + (1-m)z = -1 \\ y = \frac{3}{m} \\ z = \frac{1}{m} \end{cases}$$

$$(S_{m}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{m} \\ y = \frac{3}{m} \\ z = \frac{1}{m} \end{cases}$$

Dans ce cas, le système admet donc une unique solution, donnée par,

$$(-\frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \frac{1}{m})$$

Exercice 2 – Soit f la fonction définie par son expression : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \ln(x) + x^2 - 3x + 2$. (a) Donner l'ensemble de définition et de dérivation de cette fonction la fonction f est de finie sur \mathbb{R}_+^* puisque la fonction $x \to \ln(x)$ n'est définie que sur \mathbb{R}_+^* la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^*

(b) Étudier les variations de la fonction f.

$$x \in \mathbb{R}_{+}^{*}, f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{2x^{2}}{x} - \frac{3x}{x}$$
$$f'(x) = \frac{2x^{2} - 3x + 1}{x}$$

Mathématiques – ECG1 DM 1

on factorise le polynôme $P: x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1$$

$$= 9 - 8$$

$$\Delta = 1$$

 $\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines réelles x_1 et x_2

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 1}{4} = 0,5$$
$$x_2 = \frac{b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + 1}{4} = 1$$

donc
$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)(x - 0.5) = (2x - 2)(x - 0.5)$$

donc
$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-0,5)}{x}$$

	<i>X</i>		
x	0 0.	.5 1	+∞
2x-2	_	- 0	+
x - 0.5	- () +	+
х	0 +	+	+
f'(x)	+ () – 0	+
f	$f(0.5) + \infty$ 0		

$$f(0,5) = \ln(0,5) + 0,25 - 1,5 + 2$$

$$= \ln(0,5) + 0,75$$

$$f(1) = \ln(1) + 1 - 3 + 2$$

(c) Représenter graphiquement l'allure de sa courbe représentative.