TD 10 – Applications

Exercice 1 – On considère les deux applications $f : [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ et $g : [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ définies par leur tableau de valeurs ci-dessous.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	4	2	1	6	5

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	1	2	3	4	6	5

1. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ (après avoir justifié que ces objets sont bien définis).
2. Déterminer les deux ensembles suivants
$$f\langle\{1,5\}\rangle = \{f(x) \mid x \in \{1,5\}\} \qquad \text{et} \qquad g\langle\{5,6\}\rangle = \{g(x) \mid x \in \{5,6\}\}$$
3. Justifier que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 2 – Recherche d'antécédent. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de 4 puis de -1 par l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3x+4}{x^2+1} \end{array}$$
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par l'application
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, x+2y-z) \end{array}$$

Exercice 3 – Composition. On considère les deux applications
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2x+6 \end{array}$$

1. Justifier l'existence de $f \circ g$ et $g \circ f$ et donner leur expression.
2. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? *Justifier la réponse.*
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions f et g.
4. ($\star$) Déterminer graphiquement les deux ensembles suivants
$$f\langle]-3,1]\rangle = \{f(x) | x \in]-3,1]\} \qquad \text{et} \qquad g\langle[-1,1]\rangle = \{g(x) | x \in [-1,1]\}$$

Exercice 4 – Composition. On considère les deux applications
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+\mathrm{e}^x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Justifier que les applications f et g sont bien définies. Démontrer que,
$$f - f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

Exercice 5 – Injectivité/surjectivité/bijectivité selon les ensembles de départ/d'arrivée. On considère l'application
$$h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$$

1. Montrer que, lorsque $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$, l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ni injective, ni surjective.
2. Montrer que, lorsque $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}$, l'application $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective, mais pas surjective.
3. Montrer que, lorsque $E = \mathbb{R}_+$ et $F = [1,+\infty[$, l'application $h : \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$ est une bijection.

Exercice 6 – Injectivité, surjectivité, bijectivité. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de chacun des applications f suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+2 \end{array}$
2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$
4. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & |x+1| \end{array}$
5. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$
6. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{-1,1\} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \end{array}$

On pourra représenter les fonctions pour se faire une idée des propriétés à démontrer.

Exercice 7 – Bijectivité avec plusieurs méthodes. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. On considère les deux applications suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y,-x+3y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{3a-2b}{5}, \frac{a+b}{5}\right) \end{array}$$

   Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une bijection et que g est la réciproque de f. *(On pourra utiliser la méthode 1 du cours.)*
2. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y,x-y) \end{array}$$

   Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(On pourra utiliser la méthode 2 du cours.)*
3. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(2x+1)-1 \end{array}$$

   Montrer que la fonction f est bijective et déterminer son application réciproque. *(On pourra utiliser la méthode 2 du cours.)*

Exercice 8 – On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-y,2y-6x) \end{array}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0,0)$.
2. Montrer, par double inclusion, que l'ensemble image de f est $\mathrm{Im}(f) = \{(a,-2a) |\ a \in \mathbb{R}\}$.
3. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercices supplémentaires

Exercice 9 – On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{-1\} \\ x & \longmapsto & \frac{1-x}{1+x} \end{array}$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f(x) \neq -1$.
2. Déterminer l'application $f \circ f$.
3. En déduire que $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ est une bijection et on précisera sa bijection réciproque.

Exercice 10 – Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer les implications suivantes.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (mais g pas forcément).
4. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective (mais f pas forcément).

Exercice 11 – Soient E et F deux ensembles et $f, g\colon E \to F$ deux applications telles que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.