

TD 07 – SUITES (CORRECTION)

Exercice 1 – 1.

Propriété P_n .

$$P_n : "u_n = 11 \cdot 5^n"$$

Initialisation. Pour $n = 0, u_0 = 11 = 11 \cdot 5^0$.

Donc P_0 est vraie.

Hérédité. Supposons P_n vraie : $u_n = 11 \cdot 5^n$. Alors

$$u_{n+1} = 5u_n = 5 \cdot (11 \cdot 5^n) = 11 \cdot 5^{n+1}$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion. Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,
donc pour tout $n \in \mathbb{N} u_n = 11 \cdot 5^n$.

2. Propriété P_n .

$$P_n : "3 < v_n < 5"$$

Initialisation.

$v_0 = 4$ et $3 < 4 < 5$. Donc P_0 est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie :

$$3 < v_n < 5 \text{ donc } \frac{6}{10} \cdot 3 < \frac{6}{10} v_n < \frac{6}{10} \cdot 5 \quad (\text{car } \frac{6}{10} > 0)$$

$$\text{donc, } 1,8 < \frac{6}{10} v_n < 3.$$

$$\text{donc, } 1,8 + 2 < \frac{6}{10} v_n + 2 < 3 + 2$$

$$\text{donc, } 3,8 < v_{n+1} < 5.$$

En particulier, $3 < v_{n+1} < 5$. Ainsi P_{n+1} est vraie.

Conclusion.

Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, 3 < v_n < 5$.

3.

Propriété P_n .

$$P_n : "S_n = \frac{n(n+1)}{2}"$$

Initialisation.

Pour $n = 1, S_1 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Donc P_1 est vraie.

Hérédité.

Soit $n \geq 1$, supposons P_n vraie : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Alors

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion.

Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 1$, donc pour tout $n \geq 1 S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2 – 1. $u_0 = 1, u_1 = \frac{2}{3}, u_2 = \frac{3}{5}, u_3 = \frac{4}{7}$

2. $v_0 = 2, v_1 = 3, v_2 = 5, v_3 = 9$

3. $w_0 = 1, w_1 = -2, w_2 = 4, w_3 = -8$

Exercice 3 – 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -2 \times 3^n \leq 0$

Donc $(u_n)_n$ décroissante

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -2n \leq 0$

Donc $(u_n)_n$ décroissante

$$3. \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+3)(n+2)} \geq 0$$

Donc $(u_n)_n$ croissante

$$4. \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geq 2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

Donc $(u_n)_n$ croissante

Exercice 4 – 1. Calculons la dérivée:

$$f'(x) = -e^{-x}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Ainsi f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Comme f est décroissante, pour tout $x < y$ on a $f(x) > f(y)$. En particulier, pour tout entier n ,

$$n < n+1 \implies f(n) > f(n+1).$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f(n) > f(n+1) = u_{n+1}$$

ce qui signifie que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 5 – 1. $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = |(-1)^n| = 1$ donc la suite $(u_n)_n$ est bornée.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}$ donc la suite $(v_n)_n$ est bornée.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |w_n| = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq w_n \leq 1$. Donc la suite (w_n) est bornée.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |z_n| = \left| \frac{1}{n} + (-1)^n \right| \leq \frac{1}{n} + 1 \leq 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, -2 \leq z_n \leq 2$

Donc la suite $(z_n)_n$ est bornée.

Exercice 6 – 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 3n$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2 - 4n$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{5} + \frac{n}{2}$

Exercice 7 – 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7^n$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \times (-3)^n$

3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4 \times \left(\frac{1}{11}\right)^n$

Exercice 8 – 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 - 4^n$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 9 – 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 + 17n) \frac{1}{2^n}$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, On ne peut pas conclure

Exercice 10 – 1) Posons $\forall n \in \mathbb{N}, w_n := v_n - u_n$

On a, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = 0$ Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 = 1$. 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ &= 3u_n + 2(1 + u_n) \\ &= 5u_n + 2 \end{aligned}$$

Donc $(u_n)_n$ arithmético-géométrique

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}$$

Exercice 11 –

Exercice 12 –