

II. Avant-propos : la résolution d'équation

1	Résoudre une équation	1
1.1	Équation du premier degré	1
1.2	Équation du second degré	2
1.3	Équations avec des fractions	3
2	Résoudre une inéquation	4
2.1	Manipuler les inégalités	4
2.2	Résolution d'inéquations grâce à un tableau de signe	5

1 Résoudre une équation

Résoudre une équation, c'est trouver l'ensemble de ses solutions. Les difficultés principales sont de ne pas oublier de solutions et de s'assurer que les valeurs obtenues sont bien des solutions.

1.1 Équation du premier degré

Proposition 1.1 — Résolution d'une équation de premier degré. Soient a, b des réels tels que a soit non nul. L'équation du premier degré

$$ax + b = 0$$

admet une unique solution, donnée par

$$x = -\frac{b}{a}.$$



Au lieu d'apprendre par coeur cette formule, on pourra plutôt la retrouver à chaque fois via des manipulations sur l'équation :

$$\begin{aligned} ax + b = 0 &\Leftrightarrow ax + b - b = -b \\ &\Leftrightarrow ax = -b \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} \times ax = -\frac{1}{a} \times b \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Pensez aussi à toujours vérifier que la solution que vous indiquez... est bien une solution au cas où des erreurs de calcul auraient été faites...

Exercice 1.2 Résoudre les équations du premier degré suivantes. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} x - 5 = 3 &\Leftrightarrow x = 8 \\ 4x = 9 &\Leftrightarrow x = \frac{9}{4} \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{5} = 7 &\Leftrightarrow x = 35 \end{aligned}$$

1.2 Équation du second degré

Proposition 1.3 — Résolution de $x^2 = a$. Soit a un nombre réel.

- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = 0$ admet une *unique* solution donnée par $x = 0$.
- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions données par $x_1 = \sqrt{a}$ et $x_2 = -\sqrt{a}$.

Exercice 1.4 Résoudre les équations du second degré suivantes.

1. L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.
2. Soit x un réel. On a $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
3. Soit x un réel. On a $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$.
4. Soit x un réel. On a $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Proposition 1.5 — Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$. Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$. On appelle *discriminant* de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ le réel

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution donnée par

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution réelle.

Exercice 1.6

1. Résolvons $3x^2 - x + 2 = 0$.

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -23.$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions.

2. Résolvons $-5x^2 - 9x - 2 = 0$.

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-5) \times (-2) = 41$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles, données par

$$x_1 = \frac{-(-9) - \sqrt{41}}{2 \times (-5)} = \frac{-9 + \sqrt{41}}{10} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-9) + \sqrt{41}}{2 \times (-5)} = -\frac{9 + \sqrt{41}}{10}.$$

3. Résolvons $\frac{x^2}{3} - 2x + 3 = 0$.

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times \frac{1}{3} \times 3 = 0.$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution, donnée par

$$x_0 = \frac{-(-2)}{2 \times \frac{1}{3}} = 3.$$

1.3 Équations avec des fractions

Expliquons la méthode principale sur un exemple.

Exercice 1.7 Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{2-x}{x}.$$

1. Identifier les *valeurs interdites* (les valeurs pour lesquelles le dénominateur vaut 0, ce qui est interdit). Ici, les valeurs interdites sont les x tels que

$$x-1=0 \quad \text{et} \quad x=0,$$

c'est-à-dire $x=1$ et $x=0$.

2. Utiliser le *produit en croix* puis développer pour se ramener à une *équation du second degré*.

Soit x un nombre réel différent de 0 et 1.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} &= \frac{2-x}{x} & \Leftrightarrow & (2x-3) \times x = (2-x) \times (x-1) \\ & & \Leftrightarrow & 2x^2 - 3x = 2x - 2 - x^2 - x \\ & & \Leftrightarrow & 3x^2 - 6x + 2 = 0 \end{aligned}$$

3. On résout l'équation du second degré grâce à la Proposition 1.5. Le discriminant est donné par

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 36 - 24 = 12.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation $3x^2 - 6x + 2 = 0$ admet deux solutions réelles données par

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{12}}{2 \times 3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{12}}{2 \times 3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. On conclut sur l'ensemble des solutions : Comme les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites, on en déduit que l'ensemble des solutions est donné par

$$\left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}.$$

On peut également utiliser une deuxième méthode qui est cependant plus calculatoire.

Exercice 1.8 Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{2x-3}{x-1} = \frac{2-x}{x}.$$

1. Identifier les *valeurs interdites* : ici 1 et 0.
2. Tout mettre *au même dénominateur* pour se ramener à une *équation du second degré*.
Soit x un nombre réel différent de 0 et 1.

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{x-1} &= \frac{2-x}{x} & \Leftrightarrow & \frac{2x-3}{x-1} - \frac{2-x}{x} = 0 \\ & & \Leftrightarrow & \frac{(2x-3)x - (2-x)(x-1)}{x(x-1)} = 0 \\ & & \Leftrightarrow & \frac{3x^2 - 6x + 2}{x(x-1)} = 0 \\ & & \Leftrightarrow & 3x^2 - 6x + 2 = 0 \end{aligned}$$

3. Et on conclut comme précédemment.

2 Résoudre une inéquation

2.1 Manipuler les inégalités

Proposition 2.1 Ajouter ou soustraire un nombre ne change pas le sens d'une inégalité : pour tous réels a, b, c ,

$$b \leq c \Leftrightarrow b + a \leq c + a$$

Proposition 2.2 — Addition de deux inégalités. On peut additionner deux inégalités. Soient a, b, c, d des nombres réels.

$$\text{Si } a \leq b \text{ et } c \leq d \text{ alors } a + c \leq b + d$$

Exercice 2.3 Soient a et b deux nombres réels tels que

$$1 \leq a \leq 2 \quad \text{et} \quad -5 \leq b \leq -3.$$

On obtient l'encadrement suivant pour $a + b$.

$$-4 < a + b < -1$$

Proposition 2.4 — Multiplication par un scalaire. Soient a, b, c des réels.

1. Si $a > 0$, alors multiplier par a ne change pas le sens d'une inégalité

$$b \leq c \Leftrightarrow ab \leq ac.$$

2. Si $a < 0$, alors multiplier par a inverse le sens d'une inégalité

$$b \leq c \Leftrightarrow ab \geq ac.$$



On ne multiplie donc jamais une inégalité par une quantité dont le signe est incertain ou variable.

Exercice 2.5 Avec les nombres a, b de l'Exercice 2.3, on obtient l'encadrement suivant pour $-b$:

$$3 \leq -b \leq 5$$

et donc pour $a - b$:

$$4 \leq a - b \leq 7.$$

Proposition 2.6 — Multiplication de deux inégalités de nombres positifs. Soient a, b, c, d des nombres réels positifs.

$$\text{Si } 0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d \text{ alors } ac \leq bd$$

Exercice 2.7 Reprenons les réels a, b de l'Exercice 2.3. Comme on a

$$0 < 1 \leq a \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 < 3 \leq -b \leq 5,$$

on peut obtenir un encadrement pour le produit $a \times (-b)$, donné par

$$3 \leq a \times (-b) \leq 10.$$

Proposition 2.8 — Passage à l'inverse. Soient a, b des réels non nuls et de même signe.

1. Si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.
2. Si $a \leq b < 0$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} < 0$.

! On ne divise jamais deux inégalités : on passe d'abord à l'inverse puis, on multiplie les inégalités.

Exercice 2.9 Toujours avec les réels de l'Exercice 2.3,

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3} \leq b \leq -\frac{1}{5}$$

! Des propriétés analogues existent avec des inégalités strictes.

Proposition 2.10 — Avec le carré. Soient a, b deux nombres réels de même signe.

1. Si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$.
2. Si $a \leq b \leq 0$ alors $b^2 \leq a^2$.

! Le passage au carré se passe mal si les nombres n'ont pas le même signe. Tout peut arriver, comme le montre les deux exemples suivants :

- on a $-2 \leq 1$ et $4 = (-2)^2 \geq 1 = 1^2$, dans ce cas, la deuxième inégalité est inversée par rapport à la première,
- on a $-2 \leq 4$ et $4 = (-2)^2 \leq 16 = 4^2$, dans ce cas, la deuxième inégalité est dans le même sens que la première.

Exercice 2.11 Toujours avec les réels de l'Exercice 2.3, on a

$$1 \leq a^2 \leq 4 \quad \text{et} \quad 9 \leq b^2 \leq 25$$

Proposition 2.12 — Avec la racine carrée. Soient a, b deux nombres réels positifs.

$$\text{Si} \quad 0 \leq a \leq b \quad \text{alors} \quad 0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

Exercice 2.13 Toujours avec les réels de l'Exercice 2.3, on a

$$1 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{2}.$$

2.2 Résolution d'inéquations grâce à un tableau de signe

Dans le cadre général, pour résoudre une inéquation,

- on identifie les éventuelles *valeurs interdites*,
- on passe tout à gauche,
- on *factorise* un maximum si on un produit/on regroupe tout en une seule fraction si on a des quotients,
- on dresse le *tableau de signe* du produit/quotient,
- on en déduit l'ensemble des solutions.

Tableaux de signe classiques

Proposition 2.14 — Tableau de signe de $ax + b$.

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$-$	$\dot{0}$	$+$

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	$+$	$\dot{0}$	$-$

Proposition 2.15 — Tableau de signe de $ax^2 + bx + c$.

- Premier cas : $\Delta > 0$.

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	+	0	-	+

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	-	0	+	-

- Deuxième cas : $\Delta = 0$.

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	+	0	+

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	-	0	-

- Troisième cas : $\Delta < 0$.

Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	+	+

Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	-	-

La méthode illustrée sur un exemple

Réolvons l'inégalité suivante :

$$\frac{2x-1}{2-x} \leq x.$$

- On ne peut pas diviser par zéro. Les *valeurs interdites* sont les réels x tels que $2-x=0$, c'est-à-dire juste $x=2$.
- On passe tout à gauche :

$$\frac{2x-1}{2-x} \leq x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{2-x} - x \leq 0$$

- On *factorise* :

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{2-x} \leq x &\quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1-x(2-x)}{2-x} \leq 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1}{2-x} \leq 0 \end{aligned}$$

- On dresse le *tableau de signe* : d'abord, on regarde les points d'annulation du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned} x^2-1=0 &\quad \Leftrightarrow \quad x=1 \text{ ou } x=-1 \\ 2-x=0 &\quad \Leftrightarrow \quad x=2 \end{aligned}$$

Puis, on dresse le tableau de signe.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
x^2-1	+	0	-	+	+
$2-x$	+	+	+	0	-
$\frac{x^2-1}{2-x}$	+	0	-	+	-

- On en déduit l'ensemble des solutions qui est donné par

$$[-1, 1] \cup]2, +\infty[.$$