Exercice 1

1. On a :

$$\begin{tikzcd} [\![1,6]\!] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & [\![1,6]\!] \arrow[r, "g"] & [\![1,6]\!] \end{tikzcd}$$

Donc $g\circ f : [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ bien défini.

x	1	2	3	4	5	6
$(g\circ f)(x)$	3	4	2	1	5	6

car $g(f(1)) = g(3) = 3$

$g(f(2)) = g(4) = 4$

...

On a :

$$\begin{tikzcd} [\![1,6]\!] \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & [\![1,6]\!] \arrow[r, "f"] & [\![1,6]\!] \end{tikzcd}$$

Donc $f\circ g : [\![1,6]\!] \to [\![1,6]\!]$ bien défini.

x	1	2	3	4	5	6
$(f\circ g)(x)$	3	4	2	1	5	6

2. On a :

$f\langle\{1,5\}\rangle = \{f(1), f(5)\} = \{3,6\}$

$g\langle\{5,6\}\rangle = \{g(5), g(6)\} = \{6,5\}$

3. Considérons la fonction h donnée par :

x	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	4	3	1	2	6	5

Alors, on vérifie que

- pour tout $x \in [\![1,6]\!]$, $f(h(x)) = x$
- pour tout $x \in [\![1,6]\!]$, $h(f(x)) = x$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est donné par h.

Exercice 2

1. •• On résout l'équation $f(x)=4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x)=4 &\iff \frac{3x+4}{x^2+1}=4 \\ &\iff 3x+4=4(x^2+1) \\ &\iff 4x^2-3x=0 \\ &\iff x(4x-3)=0 \\ &\iff x=0 \text{ ou } 4x-3=0 \\ &\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de 4 par f est donné par

$$\left\{0, \frac{3}{4}\right\}$$

Vérification : $f(0)=\frac{4}{1}=4$ ✓

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3\times\frac{3}{4}+4}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\frac{\frac{9+16}{4}}{\frac{9+16}{16}}=\frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{16}}=\frac{25}{4}\times\frac{16}{25}=4 \quad ✓$$

•• On résout l'équation $f(x)=-1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(x)=-1 &\iff \frac{3x+4}{x^2+1}=-1 \\ &\iff 3x+4=-(x^2+1) \\ &\iff x^2+3x+5=0 \end{aligned}$$

$$\Delta=(3)^2-4\times1\times5=9-20=-11<0$$

Donc l'équation $x^2+3x+5=0$ n'admet de solution.

Donc -1 n'admet pas d'antécédent par f.

2. On résout l'équation $g(x,y,z)=(1,2)$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} g(x,y,z)=(1,2) &\iff (2x+y+z,\ x+2y-z)=(1,2) \\ &\iff \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=1 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ &\iff \begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y+3z=-3 \end{cases} \end{aligned}$$

deux équations pour trois inconnues :
on exprime x et y en fct de z (par ex)

$$\iff \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z + 1 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des antécédents de $(1,2)$ par g est donné par

$$\{(-z, z+1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3

1. On a :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Donc $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(3x+1) \\ &= -2(3x+1)+6 \\ &= -6x+4 \end{aligned}$$

On a :

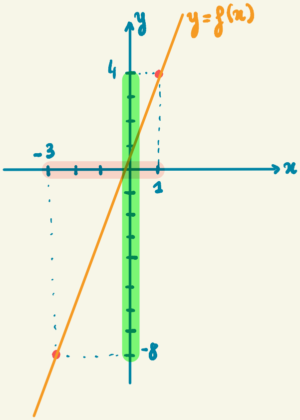
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

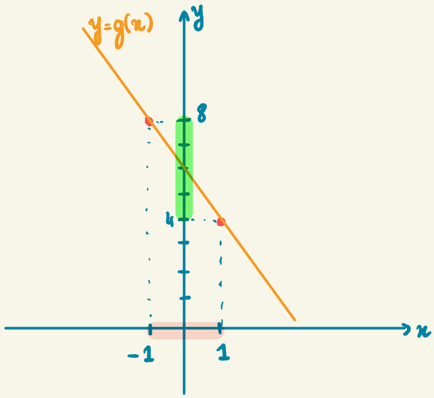
Donc $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(-2x+6) \\ &= 3(-2x+6) \\ &= -6x+18 \end{aligned}$$

2. On a $f \circ g \neq g \circ f$ car par exemple, $(f \circ g)(0) = 18$ alors que $(g \circ f)(0) = 4$.

3.





4. Donc $f\langle]-3,1] \rangle =]-8,4]$

Donc $g\langle [-1,1] \rangle = [4,8]$

Exercice 4

- Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on a $1+e^x \geq 1 > 0$ donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, g est une fonction affine donc est bien définie sur $\mathbb{R}$.

- On a

$$\underbrace{\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}}_{f\circ g}$$

Donc $f \circ g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

But : Montrons que $f - f\circ g = id_{\mathbb{R}}$, c'-à-d
que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - (f\circ g)(x) = x.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) - (f\circ g)(x) &= \ln(1+e^x) - f(-x) \\
&= \ln(1+e^x) - \ln(1+e^{-x}) \\
&= \ln\left(e^x(e^{-x}+1)\right) - \ln(1+e^{-x}) \\
&= \ln(e^x) + \cancel{\ln(e^{-x}+1)} - \cancel{\ln(1+e^{-x})} \\
&= x.
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. Soit $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$.

.. Injectivité ?
Soient $x=1$ et $y=-1$ deux éléments de $\mathbb{R}$.
D'une part, $x \neq y$.
D'autre part, $h(x) = 3 = h(y)$.
Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

.. Surjectivité ?
L'équation $h(x) = x^2+1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1 \geq 1$).
Donc 0 n'admet pas d'antécédent par h.
Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

2. Soit $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$.

Injectivité:
Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $h(x) = h(y)$.
Montrons que $x = y$.

Comme $h(x)=h(y)$, on a

$$x^2+1=y^2+1$$

c-à-d : $x^2=y^2$

c-à-d : $x=y$ ou $x=-y$

Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x=y$.

Donc $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective.

.. Surjectivité ?

L'équation $h(x)=x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2+1 \geqslant 1$).

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par h.

Donc $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective

3. Soit $h : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[\\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$

Injectivité :

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $h(x)=h(y)$.

Montrons que $x=y$.

Comme $h(x)=h(y)$, on a

$$x^2+1=y^2+1$$

c-à-d : $x^2=y^2$

c-à-d : $x=y$ ou $x=-y$

Comme x et y sont tous les deux positifs, nécessairement $x=y$.

Donc $h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est injective.

Surjectivité :

Soit $y \in [1;+\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}_+$ tq $f(x)=y$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} h(x)=y &\iff x^2+1=y \\ &\iff x^2=y-1 \\ &\iff x=\sqrt{y-1} \text{ ou } x=-\sqrt{y-1} \quad \text{car } y-1 \geqslant 0 \text{ car } y \geqslant 1 \\ &\iff x=\sqrt{y-1} \quad \text{car } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $y=h(x)$ avec $x=\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}_+$

Donc $h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est surjective.

Bijectivité :

$h : \mathbb{R}_+ \to [1;+\infty[$ est bijective car elle est injective et surjective.

Exercice 6

1. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+2 \end{array}$

Injectivité :

Soient n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $f(n_1) = f(n_2)$.
Montrons que $n_1 = n_2$.

Comme $f(n_1) = f(n_2)$, on a $n_1 + 2 = n_2 + 2$ et donc $n_1 = n_2$.
Donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective.

Surjectivité :

L'équation $n+2 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$.
Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f.
Donc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ n'est pas surjective (et donc non bijective)

2. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 2x+y \end{array}$.

Injectivité :

On a $f(0,1) = 1 = f(\frac{1}{2}, 0)$
alors que $(0,1) \neq (\frac{1}{2}, 0)$.
Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas injective. (et donc non bijective)

Surjectivité :

Soit $z \in \mathbb{R}$. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = 2x + y = z$.
On peut prendre par ex, $(x,y) = (0,z) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi $z = f(0,z)$. Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective.

3. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$

Injectivité :

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $f(x) = f(y)$.
Montrons que $x = y$.
Comme $f(x) = f(y)$, on a $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ et donc $x = y$.
Donc $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est injective.

Surjectivité :

L'équation $\frac{1}{x} = 0$ (dans $\mathbb{R}_+^*$) n'a pas de solution (car $\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = x \times 0 = 0$ pour $x \neq 0$).
Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f.
Donc f n'est pas surjective (et donc non bijective)

4. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto |x+1| \end{array}$

Injectivité :

On a $f(0) = |1| = 1$

et $f(-2) = |-1| = 1$

Donc $f(0) = f(-2)$.

Mais $0 \neq -2$.

Donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ n'est pas injective (et donc non bijective).

Surjectivité :

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = |x+1| = y$.

On peut prendre par exemple $x = y-1 \in \mathbb{R}$ car

$f(y-1) = |y| = y$ car $y \geqslant 0$.

Donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est surjective.

5. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \end{array}$

Injectivité :

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tq $f(x) = f(y)$.

Montrons que $x = y$.

Comme $f(x) = f(y)$, on a :

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$

et donc en élevant au carré,

$x^2+1 = y^2+1$

donc $x^2 = y^2$

donc $x = y$ ou $x = -y$.

Or, x et y sont tous les deux positifs

donc nécessairement, $x = y$.

Donc $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective.

Surjectivité :

Comme une racine carrée est toujours positive,

l'équation $\sqrt{x^2+1} = -1$ n'admet pas de solutions.

Donc 0 n'admet pas d'antécédent par f.

Donc $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective (et donc pas bijective).

6. Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \{-1,1\} \\ n \longmapsto (-1)^n \end{array}$

Injectivité :

On a $f(2) = 1 = f(4)$ alors que $2 \neq 4$.

Donc $f : \mathbb{N} \to \{-1,1\}$ n'est pas injective (et donc pas bijective).

Surjectivité:

On a $1 = f(2)$
$-1 = f(1)$ (par ex.)

Donc tous les éléments de $\{1;-1\}$ admettent un antécédent par f.

Donc $f : \mathbb{N} \to \{-1,1\}$ est surjective

Exercice 7

1. Pour montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective, on va mque

$$f \circ g = id_{\mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

- $$\begin{aligned} f(g(x,y)) &= f\left(\frac{3x-2y}{5}, \frac{x+y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x-2y}{5} + 2 \times \frac{x+y}{5}, -\frac{3x-2y}{5} + 3 \times \frac{x+y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x-\cancel{2y}+2x+\cancel{2y}}{5}, \frac{-\cancel{3x}+2y+\cancel{3x}+3y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{5x}{5}, \frac{5y}{5}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g(f(x,y)) &= g(x+2y, -x+3y) \\ &= \left(\frac{3(x+2y)-2(-x+3y)}{5}, \frac{(x+2y)+(-x+3y)}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3x+\cancel{6y}+2x-\cancel{6y}}{5}, \frac{\cancel{x}+2y-\cancel{x}+3y}{5}\right) \\ &= \left(\frac{5x}{5}, \frac{5y}{5}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

Donc f est bijective et sa bijection réciproque est donné par g.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que l'équation $f(x,y) = (a,b)$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ admet une unique solution.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) = (a,b) &\iff (2x-y, x-y) = (a,b) \\ &\iff \begin{cases} 2x-y = a \\ x-y = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x-y = b \\ 2x-y = a \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = b \\ y = -2b + a \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = a - 2b \end{cases}$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f(x,y) = (a,b)$ admet une unique solution donnée par

$$(x,y) = (a-b, a-2b)$$

Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et sa bijection réciproque est donné par:

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longrightarrow & (a-b, a-2b) \end{array}$$

3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrons que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$ admet une unique solution.

Soit $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longleftrightarrow \ln(2x+1) - 1 = y \\ &\Longleftrightarrow \ln(2x+1) = y + 1 \\ &\Longleftrightarrow 2x + 1 = \exp(y+1) \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\exp(y+1) - 1}{2} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$ tel que $f(x) = y$, donné par

$$x = \frac{\exp(y+1) - 1}{2}$$

Donc $f :]-\frac{1}{2};+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective et sa bijection réciproque est donné par

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{1}{2};+\infty[\\ y & \longmapsto & \frac{\exp(y+1)-1}{2} \end{array}$$

Exercice 8

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) = (0,0) &\Longleftrightarrow (3x - y, 2y - 6x) = (0,0) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ \cancel{0 = 0} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow y = 3x \end{aligned}$$

L'ensemble des antécédents de $(0,0)$ est donné par :

$$\{(x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

2. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \underbrace{\{(a,-2a) \mid a \in \mathbb{R}\}}_{:=F}$ par double inclusion.

▶ Mque $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$.

Soit $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $(a,b) \in F$.

Comme $(a,b) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(a,b) = (3x-y, 2y-6x)$.

Pour mque $(a,b) \in F$, il s'agit de mque $b = -2a$.

On a

$$\begin{aligned} -2a &= -2(3x-y) \\ &= -6x+2y \\ &= b. \end{aligned}$$

Donc $(a,b) \in F$. Donc $\mathrm{Im} f \subseteq F$.

▶ Mque $F \subseteq \mathrm{Im} f$.

Soit $(a,b) \in F$. Mque $(a,b) \in \mathrm{Im} f$.

Comme $(a,b) \in F$, on sait que $b = -2a$.

On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $(a,b) = f(x,y)$.

On peut prendre par ex

$$(x,y) = (0,-a)$$

car $f(0,-a) = (a,-2a) = (a,b)$ par hypothèse.

Donc $(a,b) \in \mathrm{Im} f$. Donc $F \subseteq \mathrm{Im} f$.

3. <u>Injectivité</u>:

D'après la question 1, $f(0,0) = f(1,3) = (0,0)$ (l'élément $(0,0)$ admet une infinité d'antécédent).

Mais $(0,0) \neq (1,3)$. Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est pas injective (et donc pas bijective).

<u>Surjectivité</u>:

D'après la question 2, $\mathrm{Im} f = \{(a,-2a) \mid a \in \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}^2$ (par ex $(1,0) \notin \mathrm{Im} f$ car $0 \neq -2 \times 1$)

Donc $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ n'est pas surjective.

Exercices supplémentaires

Exercice 9

1. Cette question consiste à mque f est bien déf au sens où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f(x) \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{-1\}}_{\text{bon ens. d'arrivée}}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = -1 &\iff \frac{1-x}{1+x} = -1 \\ &\iff 1-x = -(1+x) \\ &\iff 1-\cancel{x} = -1-\cancel{x} \\ &\iff \underbrace{1 = -1}_{\text{impossible}} \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) \neq -1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a

$$\begin{aligned} (\underbrace{f \circ f}_{\text{bien déf}})(x) &= f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{\frac{1+x-(1-x)}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} \\ &= \frac{2x}{1+x} \times \frac{1+x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

3. Comme $f \circ f = id_{\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$, f est bijective et sa bijection réciproque est donné par elle-même.

Exercice 10

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

1) On suppose f et g injectives.

Soient $u, u' \in E$ tels que $g \circ f(u) = g \circ f(u')$.

Alors $g(f(u)) = g(f(u'))$

donc $f(u) = f(u')$ car g est injective

donc $u = u'$ car f est injective

Donc $g \circ f$ est injective.

2) On suppose que f et g sont surjectives.

Soit $w \in G$.

Puisque g est surjective de F dans G, il existe

$v \in F$ tel que $g(v) = w$

Puisque f est surjective de E dans F (et $v \in F$),

il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$

On a alors

$$w = g(v) = g(f(u)) = g \circ f(u)$$

Donc $g \circ f$ est surjective de E dans G.

3) On suppose que $g \circ f$ est injective.

* Soient $u, u' \in E$ tels que $f(u) = f(u')$

Alors $g(f(u)) = g(f(u'))$

donc $g \circ f(u) = g \circ f(u')$

donc $u = u'$ car $g \circ f$ est injective.

* g n'est pas forcément injective.

Ex : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

pas injective.

$g \circ f(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$

$g \circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sans que g soit injective.

4) Supposons que $g \circ f$ est surjective de E dans G.

- Soit $w \in G$.

Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que

$$g \circ f(u) = w$$

On a $\qquad g(f(u)) = w$

Posant $v = f(u) \in F$, on a $g(v) = w$.

Donc g est surjective de F dans G.

+ Pas forcément f.

Ex : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$

pas surjective

$g \circ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto (\sqrt{x})^2 = x$ $\qquad$ surjective

Exercice 11

$f : E \to F$, $g : F \to E$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "f\circ g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

On suppose que $f\circ g\circ f$ est bijective, de E dans F.

+ Montrons que f est bijective de E dans F.

→ Injectivité : soient $u, u' \in E$ tels que $f(u) = f(u')$

alors $f\circ g\,(f(u)) = f\circ g\,(f(u'))$

donc $f\circ g\circ f(u) = f\circ g\circ f(u')$

donc $u = u'$ car $f\circ g\circ f$ est injective

Ainsi f est injective.

→ Surjectivité : soit $v \in F$.

Par surjectivité de $f\circ g\circ f$, il existe $u \in E$ tel que $v = f\circ g\circ f(u) = f(g\circ f(u))$

En posant $u' = g\circ f(u) \in E$ on a $v = f(u')$

donc f est surjective

→ Ainsi f est bijective de E dans F. Soit $f^{-1} : F \to E$ son application réciproque

* Notons $h = f\circ g\circ f$.

Alors $f^{-1}\circ h\circ f^{-1} = \underbrace{f^{-1}\circ f}_{id_E}\circ g\circ \underbrace{f\circ f^{-1}}_{id_F}$

$= id_E \circ g \circ id_F$

$= g$

Donc g est composée d'applications bijectives.

D'après le cours, elle est bijective.