DS 1

Exercice 1 – *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Résoudre l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   L'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$ est une équation de second degré. Pour la résoudre, on commence par calculer son discriminant qui est donné par

   $$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

   Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles données par

   $$x_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3+5}{4} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

   Donc, finalement, l'équation $2x^2 - 3x - 2 = 0$ admet deux solutions réelles données par 2 et $-\frac{1}{2}$.
2. .
   $$\begin{aligned} A &= \sqrt{200} + 4\sqrt{72} - 5\sqrt{32} \\ &= \sqrt{2 \times 100} + 4\sqrt{36 \times 2} - 5\sqrt{16 \times 2} \\ &= \sqrt{100} \times \sqrt{2} + 4\sqrt{36} \times \sqrt{2} - 5\sqrt{16} \times \sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} + 4 \times 6 \times \sqrt{2} - 5 \times 4 \times \sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 20\sqrt{2} \\ &= 14\sqrt{2} \end{aligned}$$
3. Résoudre de manière graphique puis de manière calculatoire l'inéquation $|x-3| > 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   - **Résolution graphique.**
   - **Résolution analytique.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

     $$|x-3| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 < -2 \quad \text{ou} \quad x - 3 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 5$$

     Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x-3| > 2$ est donné par $S =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$
4. .
   $$\begin{aligned} A &= \frac{1}{e^{-2x}} \times \frac{e^{-x}}{e^{x-6}} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x+x-6}} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^{-x-6}} \\ &= e^{-x-(-x-6)} \\ &= e^6 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} B &= \ln(8) + \ln\left(e^2\right) - \ln\left(\frac{2}{e}\right) \\ &= \ln\left(2^3\right) + 2 - (\ln 2 - \ln(e)) \\ &= 3\ln 2 + 2 - \ln 2 + 1 \\ &= 3 + 2\ln 2 \end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned} x \in D &\Leftrightarrow x + 1 > 0 \text{ et } -x + 9 > 0 \\ &\Leftrightarrow x > -1 \text{ et } -x > -9 \\ &\Leftrightarrow x > -1 \text{ et } x < 9 \\ &\Leftrightarrow x \in]-1, 9[\end{aligned}$$

   Soit $x \in]-1; 9[$

$$\ln(x+1) \leqslant \ln(-x+9) \iff x+1 \leqslant -x+9$$
$$\iff 2x \leqslant 10$$
$$\iff x \leqslant 5$$
Donc $S =]-1;5]$

6.
$$x \in Df \iff x \neq 0 \text{ et } x-3 \neq 0$$
$$\iff x \neq 0 \text{ er } x \neq 3$$
$$Df = \mathbb{R} - \{0;3\}$$

De même f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0;3\}$
f' de la forme $\left(w + \frac{v}{v}\right)' = w' + \frac{v'v - vv'}{v^2}$ arec

$w(x) = \frac{1}{x}$ $u(x) = 1+x$ $v'(x) = x-3$
$w'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $u'(x) = 1$ $v'(x) = 1$

$\forall x \in D_f$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 \times (x-3) - (1+x) \times 1}{(x-3)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{-4}{(x-3)^2}$$

$$x \in D_g \iff x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$$

On étudie le signe de $x \mapsto x^2 - 3x + 2$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2$$

Le polynôme est positif à l'extérieur des racines donc $D_g =]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$ Domaine de dérivabilité: $]-\infty, 1[\cup]2; +\infty[$
g' de la Forme $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 - 3x + 2$

$u'(x) = 2x - 3$
$$g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$$
$x \in D_h \iff -2x + 8 > 0$
$\iff -2x > -8$
$\iff x < \frac{-8}{-2}$
$\iff x < 4$
$D_h =]-\infty; 4[$
Domaine de dérivabilité: $]-\infty; 4[$
h' de la forme $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = -2x + 8$ et $u'(x) = -2$
Donc $h'(x) = \frac{-2}{-2x+8}$

7. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0
   $k(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{(-x)^2+1} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{x^2+1} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{x^2+1} = -f(x)$
   Donc la fonction est impaire

Exercice 2 – On considère le polynôme P, défini par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

1. Montrer que 1 est une racine du polynôme P.
   On a
   $$P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 1 + 2 = 0$$
   Donc 1 est une racine du polynôme P.
2. Déterminer le polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)Q(x).$$
   Effectuons la division euclidienne du polynôme P par le polynôme $x \mapsto x - 1$.

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & -2x^2 & -x+2 & x-1 \\ \cline{4-4} -x^3 & +x^2 & & x^2-x-2 \\ \cline{1-2} & -x^2 & -x & \\ & x^2 & -x & \\ \cline{2-3} & & -2x+2 & \\ & & 2x-2 & \\ \cline{3-3} & & 0 & \end{array}$$

   Comme le reste de cette division euclidienne est nulle, on obtient que,
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = (x-1)Q(x)$$
   où le polynôme Q est défini par
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x^2 - x - 2$$
3. Déterminer les racines éventuelles du polynôme Q.
   Le polynôme Q est un polynôme du second degré. On commence donc par calculer son discriminant Δ qui vaut
   $$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$
   Comme $\Delta > 0$, le polynôme Q admet deux racines réelles.
   On obtient facilement que ces racines sot -1 et 2
4. En déduire le tableau de signe du polynôme P.

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
signe $x+1$	-	0	+	+	+	+	
signe $x-1$	-	-	0	+	+	+	
signe $x-2$	-	-		-	0	+	
signe $(x+1)(x-1)(x-2)$	-	0	+	0	-	0	+

5. Donner l'ensemble de définition de la fonction f. *Justifier.*
   la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que la fonction f est ni paire, ni impaire.
   Tout d'abord, on peut calculer que
   $$f(1) = -2e \qquad f(-1) = -\frac{22}{e}$$
   - Comme $f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas paire.
   - Comme $-f(-1) \neq f(1)$, la fonction f n'est pas impaire.

7. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de la forme $(uv)' = u'v + uv'$ et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= (3x^2 - 10x + 9) \times e^x + ((x^3 - 5x^2 + 9x - 7) \times e^x \\ &= (x^3 - 2x^2 - x + 2) \times e^x \\ &= P(x) \times e^x\end{aligned}$$

8. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *Les limites ne sont pas demandées.*
   Comme la fonction exponentielle est positive, en utilisant le tableau de signe de P , on obtient le tableau de signe suivant pour f' et donc le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↘	$f(-1)$	↗	$f(1)$	↘	$f(2)$	↗	

9. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1.
   La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

   Or,

$$f(0) = -7$$

   Et pour la dérivé

$$f'(0) = 2$$

   Donc, finalement, l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse -2 est donnée par

$$y = 2(x - 0) - 7 = 2x - 7$$

10. En quel·s point·s, la courbe représentative de la fonction f admet une tangente horizontale ?
    La courbe représentative de la fonction f admet une tangente horizontale aux points d'abscisses -1, 1 et 2 car ce sont les points où la dérivée s'annule (et la dérivée correspond donne le coefficient directeur de la tangente associée, et une droite est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul).

Exercice 3 – Python. *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. Pour le programme donné ci-dessous, noter sur votre feuille, dans chaque case du tableau les valeurs successives prises par les variables, et s'il y un affichage, écrire la valeur affichée.

```
x , y = 2 , 7
y = x + 2
print(y**x)
x = y
```

	Valeur de x	Valeur de y	Affichage
Ligne 1	2	7	
Ligne 2	2	4	
Ligne 3	2	4	8
Ligne 4	4	4	

2. Pour chaque valeur de x donnée, indiquer ce que le programme affiche.

```
#On suppose la valeur
#de x connue
import numpy as np
if x > 0 :
    print(np.log(x))
elif x == 0 :
    print(7)
else :
    print(x**2-2)
```

x	Affichage
np.e	1
-1	-1
0	7

3. Déterminer ce qu'affiche le programme suivant.

```
def fct(a,b,c):
    return(b**2-4, a*c)

print(fct(1,2,3))
```

Python va afficher `(0,3)`.

4. On considère la fonction (mathématique) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Définir en Python cette fonction que l'on appellera g et écrire la commande permettant d'afficher la valuation de la fonction en $x = 4$.

```
import numpy as np

def g(x):
    if x<=0:
        return(0)
    else:
        return(np.sqrt(x))

print(g(4))
```

5. .

```
def meteo(a,b):
    if (a+b)/2 >= 20:
        return("chaud")
    else:
        return("froid")
```

Exercice 4 – 1. Résoudre le système dans le cas particulier où $m = 2$.

Prenons $m = 2$ et raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss.

$$(S_2)\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - z = -4 & L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \\ z = -2 & L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Le système est échelonné on doit maintenant "remonter".

$$(S_2) \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Il suffit alors de substituer dans la première équation

$$(S_2) \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Le système possède une unique solution $(-1;6;-2)$.

2. Résoudre le système dans le cas particulier où $m = 1$.

Prenons $m = 1$ et raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss.

$$(S_1)\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y = -1 & L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ 0 = 1 & L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

La dernière ligne nous permet de conclure que S_1 n'a pas de solution.

3. Dans cette question, on suppose que $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   (a) Soit $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Raisonnons par équivalence pour résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss.

$$(S_m)\begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + (m-1)y + z = m \\ x + y + mz = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = m+1 \\ -y + (1-m)z = -m^2 & L_2 \leftrightarrow L_2 - m \\ (m-1)z = -m & L_3 \leftrightarrow L_3 - L \end{cases}$$

   (b) En déduire que le système (S_m) admet une unique solution à déterminer (en fonction du paramètre m).

   Soit $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. D'après la question précédente, on a,

$$(S_m) \iff \begin{cases} x + y + z = m+1 \\ -y + (1-m)z = -m^2 \\ (m-1)z = -m \end{cases}$$

Comme $m \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ On peut donc diviser par $m-1$ dans la dernière ligne

$$
\begin{aligned}
(S_m) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ & - & y & + & (1-m)z & = & -m^2 \\ & & & & z & = & \frac{m}{m-1} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ & - & y & + & \frac{m(1-m)}{m-1} & = & -m^2 \\ & & & & z & = & \frac{m}{m-1} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & m+1 \\ & - & y & - & m & = & -m^2 \\ & & & & z & = & \frac{m}{m-1} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -m^2+1+\frac{m}{m-1} \\ y & = & m^2+m \\ z & = & \frac{m}{m-1} \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Donc le système admet une unique solution donnée par le triplet

$$\left(-m^2+1+\frac{m}{m-1}, m^2+m, \frac{m}{m-1}\right)$$

Exercice 5 – .

(a) $\forall n \geqslant 1, \sum_{i=1}^{k} 2^k = k2^k$ (somme de constantes) donc :

$$\forall n \geqslant 1, \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} k2^k = S_n.$$

(b) Dans la somme précédente, $k \in [\![1,n]\!]$ et $i \in [\![1,k]\!]$, donc $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$.
On peut donc écrire, en inversant l'ordre de sommation : $\forall n \geqslant 1, S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} 2^k$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
On a après factorisation par 2^i :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} 2^k = 2^i \sum_{k=i}^{n} 2^{k-i} &= 2^i \sum_{k=0}^{n-i} 2^k \\
&= 2^i \times \frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} \\
&= 2^i\left(2^{n+1-i}-1\right) \\
&= 2^{n+1}-2^i
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\forall n \geqslant 1, S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1}-2^i\right)$.

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Par linéarité des sommes : $S_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} 2^i$.
La première somme est une somme de constantes, et la deuxième est une somme géométrique.
On a donc: $\forall n \geqslant 1, S_n = n2^{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = n2^{n+1} - 2\left(2^n-1\right) = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$
Ainsi, $\forall n \geqslant 1, S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.