TD ?? – Limites de suites

Exercice 1 – Limites de référence et opérations (sans FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ suivantes.

1) $u_n = n^3 + 2n - 9$

2) $u_n = -1 + \frac{1}{n^3} - \frac{6}{n}$

3) $u_n = \frac{1}{3-e^{2n}}$

4) $u_n = 2^n\left(-1 + \frac{3}{\sqrt{\ln(n)}}\right)$

5) $u_n = \frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(\ln n)^2 \times 5^n}$

6) $u_n = n^{-3} + n^5 + 6 + e^{-n}$

7) $u_n = \frac{2+\frac{1}{\ln n}}{-1+\frac{1}{n}}$

8) $u_n = -n^3 - 3n^2 - 2n + 1$

9) $u_n = \sqrt{n} - 1$

10) $u_n = \frac{-1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{e^{-n}+\frac{1}{n^2}}$

Exercice 2 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}.$$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, au vu de la Question 1, que doit vérifier la limite ℓ ?
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.
   (d) En déduire l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) En déduire l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (f) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-ce cohérent avec le résultat de la Question 2(b) ?

Exercice 3 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^4.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire qu'il existe seulement que deux comportements possibles pour la convergence de la suite.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $\ell = 0$. *(On pourra utiliser la relation de récurrence de la suite.)*
5. À l'aide des deux questions précédentes, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
6. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 – Limites de référence et opérations (avec FI). Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ suivantes.

1) $u_n = \frac{2n+1}{1-4n}$

2) $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

3) $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $(1 < b < a)$

4) $u_n = \frac{\ln(3n)}{\sqrt{n}}$

5) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{2+e^{-n}\ln(n)}$

6) $u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

7) $u_n = \sqrt{n^2+2} - n$

8) $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$

Exercice 5 – Théorème d'encadrement. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad n < u_n \leqslant 2n$$

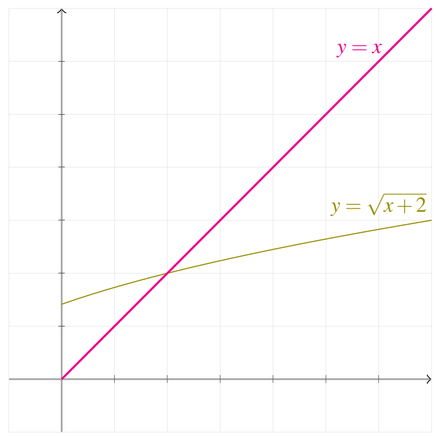
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.

1. Expliquer pourquoi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\ln(n) < v_n \leqslant \ln(2) + \ln(n).$$
3. En déduire la limite suivante
$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{\ln n} = 1.$$

Exercice 6 – Limite et suite récurrente. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Autour de la représentation graphique.
   (a) Représenter sur le graphe les premiers termes de la suite.
   (b) Que peut-on conjecturer sur la monotonie, le caractère borné et la convergence de la suite ?



2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + x + 2$.
   (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre l'équation $\ell = \sqrt{2+\ell}$ d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$.
   (c) Dresser le tableau de signe de f.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n \in [0,2]$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{\sqrt{2+u_n} + u_n}$$
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.
7. Déterminer ℓ grâce à la relation de récurrence vérifiée par la suite.

Exercice 7 – Suites adjacentes. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes. En déduire que les deux suites sont convergentes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$