Interrogation du 3/11/2025

1. .
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{5^k} &= 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k\\ &= 2\times\left(\frac{1}{5}\right)^0\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{1}{5}}\\ &= 2\times\frac{5}{4}\times\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right)\\ &= \frac{10}{4}\times\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)\end{aligned}$$
2. On doit étudier la monotonie d'une suite, on étudie le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$ (pour tout $n\in\mathbb{N}$).
   On a directement que,
   $$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\qquad u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3}-1\right)=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3^n}<0$$
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
   ou
   Lorsqu'une suite est définie comme un quotient, pour étudier sa monotonie, on peut comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 (pour tout $n\in\mathbb{N}$).
   La suite est bien à termes positifs
   On a directement que,
   $$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1$$
   On retrouve donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. . Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2n+6$
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=3\times 2^n$
4. (a) Soit $l\in\mathbb{R}$. On a
   $$l=2l-3\quad\Leftrightarrow\quad 3=l\quad\Leftrightarrow\quad l=3$$
   (b) Posons
   $$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad v_n=u_n-3.$$
   (c) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a
   $$v_{n+1}=u_{n+1}-3=2u_n-3-3=2u_n-6=2(u_n-3)=2v_n.$$
   Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2.
   (d) On en déduit que,
   $$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad v_n=v_0\times 2^n=2\times 2^n=2^{n+1}.$$
   (e) On en déduit que,
   $$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad u_n=v_n+3=2^{n+1}+3.$$
5.
   - L'équation caractéristique associée à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est donnée par
   $$r^2=4r-4\qquad\text{c-à-d}\qquad r^2-4r+4=0$$
   - On reconnait une équation du second degré dont le discriminant est donné par $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 4=0$. Comme $\Delta=0$, l'équation caractéristique admet une unique racine qui est donnée par
   $$r_0=\frac{-(-4)}{2}=2$$
   - Donc, on en déduit qu'il existe deux constantes A et B telle que
   $$\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\quad u_n=(A+Bn)\times 2^n.$$

- On détermine enfin les valeurs des deux constantes A et B grâce aux deux premiers termes de la suite. En effet, les deux constantes A et B doivent vérifier le système suivant, que l'on résout ensuite, grâce à la méthode du pivot de Gauss (ou par substitution),

$$\left\{\begin{array}{rcl}(A+0\times B)\times 2^0 & = & 0 \\ (A+1\times B)\times 2^1 & = & -1\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl}A & = & 0 \\ B & = & -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

- Conclusion. On en déduit que le terme général de la suite est donné pa r

$$\text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \quad u_n = -\frac{n}{2}\times 2^n$$