

COLLE 10 - Semaine du 04/12 au 08/12

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours.

Chapitre X - Applications

- Application, ensemble de définition, ensemble d'arrivée, antécédent, image
- Composition de deux applications
- Image directe d'une application, $\text{Im}(f)$
- Notion d'injectivité
- Notion de surjectivité
- Notion de bijectivité

Chapitre XI - Limites de suites

- Définition de convergence vers un réel, vers $\pm\infty$ en terme de quantificateurs
- Limites usuelles (puissances, exponentielle, logarithme, suites géométriques)
- Opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition) avec les quatre formes indéterminées à connaître
- Croissances comparées pour résoudre les formes indéterminées dans certains cas
- Théorèmes d'existence : par encadrement, théorème de la limite monotone
- Propriétés théoriques sur les suites : toute suite convergente est bornée, passage à la limite dans une inégalité
- Suites extraites

NOTES POUR LES COLLEURS/COLLEUSES : Les théorèmes d'existence et les propriétés théoriques sur les suites ont été vus en cours mais non pratiqués sur des exemples pour l'instant. La notion de suites adjacentes n'a pas été encore vue.

Informatique

- Calculs simples en python : $+$, $-$, $*$, $/$, $**$
- Définir une variable. Afficher une valeur avec `print`.
- Charger la bibliothèque numpy (`import numpy as np`), fonctions usuelles : `np.exp`, `np.log`, `np.sqrt`
- Instruction conditionnelle `if...elif...else`
- Les listes
- Boucles `for`
- Boucles `while`

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice du cours seront demandés parmi les suivants.

Un énoncé :

- ☐ Syntaxe d'une boucle `for` (TP 5)

```
for element in sequence:
    bloc d'instructions
```

- ☐ Syntaxe d'une boucle `while` (TP 7)

```
initialisation
while condition:
    bloc_instructions
```

-
- ☐ Définition et caractérisation d'une fonction injective (Chapitre X - Def 4.1 et Prop 4.2)
 - ☐ Définition et caractérisation d'une fonction surjective (Chapitre X - Def 4.8 et Prop 4.9)
 - ☐ Définition et caractérisation d'une fonction bijective (Chapitre X - Def 4.15 et Prop 4.16)
-

- ☐ Théorème de passage à la limite dans une inégalité (Chapitre XI - Prop 2.6)
- ☐ Limite d'une suite géométrique selon la valeur de la raison (Chapitre XI - Section 3.1)
- ☐ Théorème de croissances comparées (Chapitre XI - Prop 3.4)
- ☐ Théorème d'existence de limite par encadrement (Chapitre XI - Prop 3.8)
- ☐ Théorème de la limite monotone (Chapitre XI - Prop 3.13)

Un exercice :

- ☐ Déterminer l'ensemble des antécédents de $(0, 1)$ par f , où (Chap X - Ex. 1.11)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (2x - y, 3x - 2y) \end{aligned}$$

- ☐ Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est injective où (Chap X - Ex. 4.4)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

- ☐ Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est pas injective où (Chap X - Ex. 4.6)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

- ☐ Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective où (Chap X - Ex. 4.11)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

- ☐ Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective où (Chap X - Ex. 4.13)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

- ☐ On considère les applications (Chap X - Ex. 4.21)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} & \text{et} & & g : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ k &\longmapsto k + 1 & & & n &\longmapsto n - 1 \end{aligned}$$

Montrons que l'application f est bijective, de bijection réciproque donnée par g .

- ☐ Montrer que l'application suivante est bijective (Chap X - Ex. 4.22)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - y) \end{aligned}$$

-
- ☐ Déterminer la limite suivante (Chap XI - Ex. 3.6)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \ln(n) + (-1)^n}{2^n - n^5 + (\ln(n))^{12}}$$

☐ Déterminer la limite suivante

(Chap XI - Ex. 3.7)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

☐ Écrire un programme calculant

(TP 6)

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2}$$

☐ On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2n+1}$. Écrire un programme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 0,001$. (TP 7)