Devoir maison 2

À rendre pour le lundi 10/11/2025

- ***Les résultats finaux doivent être mis en évidence (soulignés, surlignés ou encadrés).***

Exercice 1 – Étude d'une suite récurrente d'ordre 3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0=0, u_1=2, u_2=-1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbf{N}, u_{n+3}=2u_{n+2}+5u_{n+1}-6u_n+2^n$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n=u_{n+1}-u_n$.
Déterminer v_0 et v_1, puis montrer que: $\forall n\in\mathbf{N}, v_{n+2}=v_{n+1}+6v_n+2^n$ $\quad(\mathscr{R})$
2. Déterminer une suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$, géométrique de raison 2 , telle que (w_n) vérifie la relation ($\mathscr{R}$).
On précisera son premier terme w_0.
3. Pour tout entier naturel n, on pose : $x_n=v_n-w_n$.
(a) Déterminer x_0 et x_1, puis montrer que: $\forall n\in\mathbf{N}, x_{n+2}-x_{n+1}-6x_n=0$.
(b) En déduire l'expression de x_n, puis celle de v_n, en fonction de $n\in\mathbf{N}$.
4. Montrer que : $\forall n\in\mathbf{N}^\star, u_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n\in\mathbf{N}$.

Exercice 2 – 1. Soit f la fonction définie par $f: x\longmapsto \frac{e^x}{x}-1$.
a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
b. Expliquer pourquoi f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$, puis déterminer l'expression de sa dérivée f'.
c. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
On admettra que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1 \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$
$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. Soit g la fonction définie par $g: x\longmapsto \ln(f(x))$.
a. Déduire de la question 1.c l'ensemble de définition $\mathscr{D}_g$ de la fonction g.
b. Étudier la dérivabilité de g, et montrer que :

$$\forall x\in\mathscr{D}_g, g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x(e^x-x)}$$

c. En déduire les variations de la fonction g.