Exercice 1

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1 = (-1+0+0)$

3. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \left(= \frac{1}{\infty}\right)$

4. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \left(= +\infty(-1+0)\right)$

5. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 = \left(\frac{3+0}{\infty\times\infty}\right)$

6. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ $(=0+\infty+\infty+0)$

7. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$ $\left(= \frac{2+0}{-1+0}\right)$

8. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

9. $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

10. $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ $\left(= \frac{-1+0}{0^+ + 0^+}\right)$

Exercice 2

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$: " $0 < u_n < 1$ ".

.. Initialisation : Mque $\mathcal{P}(1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 < u_1 < 1$.

On a $u_1 = \frac{u_0+1}{3-u_0} = \frac{0+1}{3-0} = \frac{1}{3}$

Donc $u_1 = \frac{1}{3} \in]0,1[$

Donc $\mathcal{P}(1)$ vraie.

.. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c-à-d que $0 < u_n < 1$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c-à-d que $0 < u_{n+1} < 1$.

On sait que $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3-u_n}$.

On* $0 < u_n < 1$ donc   * par hyp de rec

$1 < u_n + 1 < 2$

et $2 < 3 - u_n < 3$

donc $\frac{1}{3} < \frac{1}{3-u_n} < \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+_*$.

donc $\frac{1}{3}\times 1 < \frac{u_n+1}{3-u_n} < \frac{1}{2}\times 2$

c-à-d $\frac{1}{3} < u_{n+1} < 1$

donc $0 < u_{n+1} < 1$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

.. Conclusion : Par principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.

2. a) D'après la question 1, on a

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 1$

et on a aussi $u_0 \neq 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe.

b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$

si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors

$0 \leq \ell \leq 1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n+1}{3-u_n}-1} - \frac{1}{u_n-1}$$

$$= \frac{3-u_n}{u_n+1-(3-u_n)} - \frac{1}{u_n-1}$$

$$= \frac{3-u_n}{-2+2u_n} - \frac{1}{u_n-1}$$

$$= \frac{3-u_n-2}{2(u_n-1)}$$

$$= \frac{1-u_n}{2(u_n-1)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

Donc $(v_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$.

d) Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 - \frac{n}{2}$$

$$= -1 - \frac{n}{2}$$

$$= -\frac{n+2}{2}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

$$= -\frac{2}{n+2} + 1$$

f) Donc la suite $(u_n)_n$ cv et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$ ($\in [0,1]$, en accord avec la question 2.b))

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^4 \geqslant 0$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est croissante.

2. Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante,

- soit $(u_n)_n$ est majoré et la suite converge vers un nombre réel l
- soit la suite diverge vers $+\infty$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \geqslant 1$ ".

.. Initialisation : Mque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_0 \geqslant 1$

On a $u_0 \geqslant 1$

Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

.. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c-à-d que $u_n \geqslant 1$

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c-à-d que $u_{n+1} \geqslant 1$

On a $u_{n+1} = u_n + u_n^4$.

Or $u_n \geqslant 1$ par hyp de recurrence

donc $u_n^4 \geqslant 1$ car $x \mapsto x^4$ croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $u_n + u_n^4 \geqslant 2$

donc $u_{n+1} \geqslant 2 \geqslant 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

.. Conclusion : Par principe de récurrence,

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

4. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$,
comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^4$
en passant à la limite, on obtiendrait $\ell = \ell + \ell^4$ et donc $\ell = 0$.

5. Si la suite $(u_n)_n$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$,

- d'après la question 4, nécessairement $\ell = 0$
- d'après la question 3, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$ et donc en passant à la limite, $\ell \geqslant 1$

Ceci est contradictoire. Donc $(u_n)_n$ ne peut pas converger vers un $\ell \in \mathbb{R}$.

6. En utilisant les questions 2 et 5, on obtient que nécessairement, la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 4

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{-4n\left(\frac{1}{4n}-1\right)} = -\frac{1}{2} \times \frac{1+\frac{1}{2n}}{\frac{1}{4n}-1}$$

FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ $\left(= -\frac{1}{2}\,\frac{1+0}{0-1}\right)$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{3^n}{n^2}$$

FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (" 3^n gagne sur n^2 ")

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{a^n \times \left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \times \left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

FI ∞/∞ (et $+\infty - \infty$ au num)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ $\left(= \frac{1-0}{1+0}\right)$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{\ln 3}{\sqrt{n}} + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (" $\sqrt{n}$ gagne sur $\ln n$ ")

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\lim\limits_{n+\infty} n+(-1)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n+\infty} e^{-n}\ln(n) = 0$

FI $0\times\infty$ au dénominateur

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$$

FI ∞/∞

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (" $n^{3/2}$ gagne sur $(\ln n)^2$ ")

7) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \left(\sqrt{n^2+2} - n\right)\frac{\sqrt{n^2+2}+n}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

FI $+\infty-\infty$

$$= \frac{n^2+2-n^2}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

8) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\lim\limits_{n+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

FI ∞/∞ pour le 1er terme

$0\times\infty$ pour le 2ième terme

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

Exercice 5

1) Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n \geq 0$ donc $u_n > 0$.

Donc la suite $(v_n)_n$ est bien définie.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$n < u_n \leq 2n$$

donc, comme $\ln$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$,

on a

$$\ln(n) < \underbrace{\ln(u_n)}_{v_n} \leq \ln(2n) = \ln(2) + \ln n.$$

3) Pour tout $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$

donc en multipliant l'inégalité par $\frac{1}{\ln(n)}$, on obtient,

$$\frac{\ln(n)}{\ln(n)} < \frac{v_n}{\ln n} \leq \frac{\ln 2 + \ln n}{\ln n}$$

c-à-d $\quad 1 < \frac{v_n}{\ln n} \leq \frac{\ln 2}{\ln n} + 1$

Comme $\lim\limits_{n+\infty} 1 = \lim\limits_{n+\infty} \left(\frac{\ln 2}{\ln n} + 1\right) = 1$,

par thm d'encadrement, on en déduit que la suite $\left(\frac{v_n}{\ln n}\right)_n$ converge et que $\lim\limits_{n+\infty} \frac{v_n}{\ln n} = 1$.

Exercice 7

1. * la suite $(u_n)_n$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

   * la suite $(v_n)_n$ est décroissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n-(n+1)}{n(n+1)}$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0$$

* la suite $(u_n - v_n)_n$ cv vers 0 car

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n+\infty]{} 0$

Donc les deux suites sont adjacentes
donc les deux suites cv (vers une même limite)

2. * la suite $(u_n)_n$ est croissante car

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

$$= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$$

changement d'indice $j = k+1$ dans la $1^{\text{ière}}$ somme

$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$$

* la suite $(v_n)_n$ est décroissante car

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

$$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{(2n+1)n + (2n+2)n - (2n+1)(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)n}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} + n + \cancel{2n^2} + 2n - 4\cancel{n^2} - 4n - 2n - 2}{(2n+2)(2n+1)n}$$

$$= \frac{-3n-2}{(2n+2)(2n+1)n} \leqslant 0$$

* la suite $(u_n - v_n)_n$ cv vers 0 car

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$

$$= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

chgt d'indice $j = k+n$

$$= \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes
donc les deux suites cv (vers une même limite)