Interrogation du 27/11/2023

NOM Prénom :

1. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

(a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas injective.

On cherche deux éléments (x,y) et (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = f(a,b)$ mais $(x,y) \neq (a,b)$.

Prenons par exemple
$(x,y) = (1,0)$ et $(a,b) = (0,1)$

Alors
- $f(x,y) = 1+0 = 1$
  et $f(a,b) = 0+1 = 1$
  Donc $f(x,y) = f(a,b)$
- Mais $(x,y) \neq (a,b)$.

Donc f n'est pas injective.

(b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective.

Soit $z \in \mathbb{R}$. On veut montrer qu'il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = f(x,y)$.

Prenons par exemple
$(x,y) = (z,0)$

Alors $f(x,y) = z+0 = z$.

Donc f est surjective.

Tournez la page ➔

2. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

(a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est injective.

Soient x, y deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $f(x) = f(y)$.
Montrons que $x = y$.

Comme $f(x) = f(y)$, on a

$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$

donc $x^2+1 = y^2+1$

donc $x^2 = y^2$

donc $|x| = |y|$

donc $x = y$ ou $x = -y$.

Or x et y sont positifs donc la possibilité $x = -y$ est exclue.

Donc $x = y$.

Donc f est injective.

(b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

On cherche un élément z de $\mathbb{R}$ tel que l'équation $z = f(x)$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$) n'admet pas de solution.

Prenons $z = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$0 = f(x) \iff 0 = \sqrt{x^2+1}$

$\iff 0 = x^2+1$

$\iff x^2 = -1$

Or l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_+$.

Donc l'équation $0 = f(x)$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}_+$.

Donc 0 n'admet pas d'antécédents.

Donc f n'est pas surjective.