Interrogation du 10/11/2025

1. (a) Soit $l \in \mathbb{R}$. On a
$$l = 2l - 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = l \quad \Leftrightarrow \quad l = 3$$

   (b) Posons
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 3.$$

   (c) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2u_n - 3 - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3) = 2v_n.$$
   Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2.

   (d) On en déduit que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

   (e) On en déduit que,
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + 3 = 2^{n+1} + 3.$$

2. On a
$$B + 2C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{puis} \qquad A(B+2C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Pour $p = 1$, on a $A^1 = A$.
pour $p = 2$, on a
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
pour $p = 3$, on a
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$
Démontrons par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geqslant 3$, $A^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 2^{p-1} \end{pmatrix}$.
Pour cela, notons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$P(p) : \text{"}A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\text{"}$$
Initialisation. Montrons que $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Comme $A^1 = A = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix}$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathscr{P}(p)$ soit vraie. Montrons que la propriété $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie. On a
$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 2^{p-1} \\ 2^{p-1} & 2^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 2^p & 2^p \\ 2^p & 2^p \end{pmatrix} && \text{car} \quad 2^{p-1} + 2^{p-1} = 2 \times 2^{p-1} = 2^p \end{aligned}$$
Donc $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
Conclusion. Donc, par principe de récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathbb{P}(p)$ est vraie.