Chapitre 8 : Calcul Matriciel

1 Les matrices

1.1 Définitions

Définition 1.1 — Matrice. On appelle **matrice** à n **lignes** et p **colonnes** un tableau de nombres réels possédant n lignes et p colonnes, que l'on note de la forme

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, le **coefficient** d'indice (i,j), noté $a_{i,j}$, est le nombre réel placé à la i-ème ligne et j-ème colonne.

Exemple 1.2 On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 7 \\ 9 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Indiquer (si c'est possible) les coefficients suivants de la matrice.

$a_{1,3} = -1$ $\qquad a_{3,4} = 0$ $\qquad a_{4,3} =$ n'existe pas

$a_{3,1} = 9$ $\qquad a_{2,3} = 8$ $\qquad a_{1,1} = 2$

Exemple 1.3 Écrire en extension les deux matrices suivantes :

$$A = (i+j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 2}} \qquad \text{et} \qquad A = ((-1)^{i+j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\1\leqslant j\leqslant 4}}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.4 — Ensemble de matrices.
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes (matrices carrées).
- Une matrice colonne est une matrice qui ne possède qu'une seule colonne.
- Une matrice ligne est une matrice qui ne possède qu'une seule ligne.

Exemple 1.5 Pour les matrices suivantes, donner le nombre de lignes, de colonnes, et l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ auquel elles appartiennent.

Matrice	Nbre Lignes	Nbre Colonnes	$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	3	2	$A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$
$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$	2	2	$B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	1	3	$C \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ (matrice ligne)
$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$	2	1	$D \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (matrice colonne)

Définition 1.6 — Égalité de deux matrices. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a

$$A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \ a_{i,j} = b_{i,j}$$

Autrement dit, deux matrices sont **égales** si elles ont le même nombre de lignes, de colonnes, et les mêmes coefficients aux mêmes places.

Exemple 1.7 Pour quelle·s valeur·s de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ les deux matrices suivantes sont-elles égales ?

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ x-y & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=2 \\ 0=0 \\ x-y=4 \\ 0=0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=2 \\ -2y=2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

1.2 Matrices particulières

Définition 1.8 — Matrice nulle & Matrice Identité.

- La matrice de taille (n,p) dont tous les coefficients sont nuls est appelée **matrice nulle** et notée $0_{n,p}$ (ou simplement 0_n lorsque $n = p$).
- La matrice carrée de taille (n,n) contenant des 1 sur la diagonales et des 0 partout ailleurs est appelée **matrice identité de taille** n et notée I_n.

Exemple 1.9 Les matrices $0_{2,3}$ et I_3 sont données respectivement par,

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.10 — **Matrice diagonale & Matrice triangulaire.**
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que
- A est **diagonale** lorsque $\forall i \neq j, a_{ij} = 0$.
- A est **triangulaire inférieure** lorsque $\forall i < j$, $a_{ij} = 0$.
- A est **triangulaire supérieure** lorsque $\forall i > j$, $a_{ij} = 0$.

Exemple 1.11 Pour les matrices suivantes, dire lesquelles sont diagonales, triangulaires supérieures ou triangulaires inférieures.

Matrice	Diagonale	Triangulaire supérieure	Triangulaire inférieure
$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Non	Oui	Non
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	Non	Non	Oui
$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	Oui	Oui	Oui
$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$	Non	Non	Non

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition de matrices

Définition 2.1 — **Addition de deux matrices.** Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la matrice $A + B$ comme la matrice dont, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, le coefficient d'indice (i, j) est donné par

$$a_{i,j} + b_{i,j}.$$

Autrement dit, pour **sommer** deux matrices de même taille, on fait la *somme terme à terme* des coefficients.

! Attention, on ne peut pas additionner deux matrices qui n'ont pas la même taille !

Exemple 2.2 On considère les deux matrices A et B, données par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 11 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice $A + B$.

On a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 11 & 0 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3 — Règles de calculs pour l'addition.
Soient A, B et C des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors,

- $A + B = B + A$ $\rightsquigarrow$ l'addition est **commutative** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ $\rightsquigarrow$ l'addition est **associative** dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$ $\rightsquigarrow$ $0_{n,p}$ est un **élément neutre** pour l'addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

! Ces règles de calcul pour l'addition de matrices sont analogues à ceux de l'addition de nombres réels.

2.2 Produit d'une matrice par un nombre réel

Définition 2.4 — Produit d'une matrice par un nombre réel. Pour $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $\lambda \cdot A$ (ou λA) comme la matrice dont, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, le coefficient d'indice (i, j) est donné par

$$\lambda \times a_{i,j}$$

Autrement dit, pour **multiplier** une matrice **par un nombre réel**, on fait la *mutiplication de tous les coefficients* par ce nombre réel. Par convention, on note toujours le scalaire à gauche de la matrice.

Exemple 2.5 On considère la matrice A donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices $0 \cdot A, 1 \cdot A, 2 \cdot A$ et $(-1) \cdot A$.

On a

$$0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \qquad (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.6 — Règles de calculs pour la multiplication par un scalaire.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha \times \beta)A = \alpha(\beta A)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

! Ces règles de calcul pour la multiplication par un scalaire sont analogues à ceux avec les nombres.

2.3 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Jusque là, les calculs se passent de manière comparable aux calculs sur les nombres réels. Attention, pour la multiplication de deux matrices, cela se complique.

Définition 2.7 Soient

$$L = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

Alors

$$LC = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k$$

Ce produit n'existe que si le nombre de colonne de L est égal au nombre de ligne de C.

Exemple 2.8 Calculer les produits matriciels suivants.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 0 \times 6 + -(3) \times 4 + 4 \times 3 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + \cdots + n \times n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.4 Produit de deux matrices

Comme l'illustre le produit d'une matrice ligne et d'une matrice colonne, on peut définir le produit $A \times B$ (noté simplement AB) d'une matrice A par B dès que le nombre de **colonnes** de A est égal au nombre de **lignes** de B.

Définition 2.9 Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, on définit le **produit** AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, dont pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) est donné par

$$L_i(A)C_j(B) = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j}$$

où $L_i(A)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $C_j(B)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Attention à la taille des matrices.

- Pour pouvoir calculer le produit AB, il faut que le nombre de **colonnes** de la matrice A soit égale au nombre de **lignes** de matrice B.
- On a alors

$$(\text{matrice } n \times m) \cdot (\text{matrice } m \times p) = \text{matrice } n \times p$$

Le produit matriciel diffère du produit sur les nombres réels car il n'est pas **commutatif**.

- Lorsqu'il est possible de calculer le produit AB, le produit BA n'est pas forcément défini.
- Lorsque les deux produits AB et BA sont définis, en général,

$$AB \neq BA$$

Exemple 2.10 On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer, si c'est possible, les matrices AB et BA.

- Comme le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B, le produit AB est possible et doit donner une matrice 2×2.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

- Comme le nombre de colonnes de la matrice B est égal au nombre de lignes de la matrice A, le produit BA est possible et doit donner une matrice 2×2.

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.11 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer, si c'est possible, les matrices AB et BA.

- Comme le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B, on ne peut pas effecteur le produit AB.
- Par contre, comme le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A, on peut effecteur le produit BA, et il vaut

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.12 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ d & e \end{pmatrix}$$

Calculer, si c'est possible, les matrices AB et BA.

- Comme le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, on peut effecteur le produit AB, et il vaut

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ d & e \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ a-d & c-e \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ a-d & c-e \end{pmatrix}$$

- Comme le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A, on peut effecteur le produit BA, et il vaut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & c \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & a-b \\ a & c & a-c \\ d & e & d-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & a-b \\ a & c & a-c \\ d & e & d-e \end{pmatrix}$$

Proposition 2.13 — **Règles de calcul pour le produit.** Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $(A+B)C = AC + BC$

Exemple 2.14 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $B+C$ puis $A(B+C)$.
2. Calculer AB et AC puis $AB+AC$.
3. Vérifier que $A(B+C) = AB + AC$.

1. On a

$$B+C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, on a

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad AB+AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.15 On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

Calculer $A \cdot I_2, I_3 \cdot A, B \cdot 0_{4,m}, 0_{n,2} \cdot B$ (avec $m, n \in \mathbb{N}^*$). Que remarque-t-on ?

On a

$$A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A$$

On a

$$I_3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = A$$

On a

$$B \cdot 0_{4,m} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0_{4,m}$$

On a

$$0_{n,2} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{n,2}$$

De manière générale, comme l'illustre l'exemple précédent, on peut en déduire les règles de calculs suivantes concernant le produit par la matrice identité ou par la matrice nulle.

Proposition 2.16 — **Règles de calcul avec les matrices identités/nulles.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On a

- $A \cdot I_p = I_n \cdot A = A$
- $A \cdot 0_{p,q} = 0_{n,q}$ et $0_{m,n} \cdot A = 0_{m,p}$

! L'égalité $AB = 0$ n'implique pas que $A = 0$ ou $B = 0$. Ainsi, si on obtient que $AB = 0$, on ne conclura pas que $A = 0$ ou $B = 0$. Et on ne simplifiera pas par A dans une égalité du type $AB = AC$ sans hypothèse supplémentaire sur A. Par exemple, si on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 82 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors, on a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 82 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2,3}$$

tandis que $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Exemple 2.17 — **Calcul littéral matriciel.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Développer les deux premières expressions, factoriser à droite par A la troisième et factoriser à gauche par A la dernière.

$$\begin{aligned} (A+B)\cdot(A-B) &= A\cdot A - A\cdot B + B\cdot A - B\cdot B \\ (2A+B)\cdot(3A) &= 6A\cdot A + 3B\cdot A \\ (A\cdot A + BA) &= (A+B)\cdot A \\ (A\cdot A + AB + A) &= A\cdot(A+B+I_n) \end{aligned}$$

2.5 Analogies entre calcul réel et calcul matriciel

Soient $n, p, q, m \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$.

Monde des matrices	Monde des réels
$A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A$	$x + 0 = 0 + x = 0$
$A \cdot 0_{p,q} = 0_{p,q}$ et $0_{m,n} \cdot A = 0_{m,p}$	$x \times 0 = 0 \times x = 0$
$0_{n,p}$	0
$A \cdot I_p = I_n \cdot A = A$	$x \times 1 = 1 \times x$
I_n	1

! La grande différence entre le monde des matrices et le monde des réels et la non commutativité du produit matriciel, c'est-à-dire que l'ordre des matrices dans un produit est crucial. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{alors que} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.6 Puissances d'une matrice carrée

Définition 2.18 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Par convention, on a $A^0 = I_n$.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la **puissance p-ième** de de la matrice A, notée A^p est définie par

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}.$$

Proposition 2.19 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$A^{p+q} = A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p \qquad \text{et} \qquad A^{pq} = (A^p)^q = (A^q)^p$$

En général, si A et B ne commutent pas,

$$(AB)^p \neq A^p B^p \qquad \text{et} \qquad (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

En particulier, dans le monde des matrices, en général, les identités remarquables sont fausses.

Exemple 2.20 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

Gestes Invisibles/Automatismes. On demande une formule pour n'importe quelle puissance de A. On commence par calculer les petites puissances de A. Puis on conjecture une formule générale que l'on démontre par récurrence.

- Pour $p = 0$, on a $A^0 = I_3$.
- Pour $p = 1$, on a $A^1 = A$.
- pour $p = 2$, on a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- pour $p = 3$, on a

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Donc, par *récurrence*, on montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$, $A^p = 0_3$.

<u>Exemple 2.21</u> On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p.

Gestes Invisibles/Automatismes. On demande une formule pour n'importe quelle puissance de A. On commence par calculer les petites puissances de A. Puis on conjecture une formule générale que l'on démontre par récurrence.

- Pour $p = 0$, on a $A^0 = I_2$.
- Pour $p = 1$, on a $A^1 = A$.
- pour $p = 2$, on a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- pour $p = 3$, on a

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrons par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 3$, $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour cela, notons, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}(p) : \text{« } A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ »}$$

- *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Comme $A^0 = I_2$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité.* Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathbb{P}(p)$ est vraie.

2.7 Transposition

Définition 2.22 — Transposition d'une matrice. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la **transposée** de la matrice A, notée $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, comme la matrice dont, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$, le coefficient d'indice (i,j) est donné par $a_{j,i}$. De manière informelle, effectuer la transposée revient à faire "la symétrie par rapport à la diagonale".

Exemple 2.23

$$\text{Pour } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad L^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Pour } B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.24 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Exemple 2.25 On considère les deux matrices A et B, données par,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- D'une part, calculer AB, puis $(AB)^T$.

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad (AB)^T = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

- D'autre part, calculer A^T, B^T puis $B^T A^T$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad B^T A^T = \begin{pmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

Définition 2.26 — Matrice symétrique. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que A est **symétrique** lorsque $A^T = A$, c'est-à-dire, lorsque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple 2.27 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sont-elles des matrices symétriques ?

On a

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc A est une matrice symétrique mais B ne l'est pas.

3 Matrices inversibles

3.1 Définition

Définition 3.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est dite **inversible** lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.

Dans ce cas,

- la matrice B est unique,
- on a en fait $AB = I_n$ et $BA = I_n$,
- B s'appelle la **matrice inverse** de A, on la note A^{-1}.

Exemple 3.2 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.

Montrons que A est inversible, c'est-à-dire, trouvons une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AM = I_2$. On cherche donc la matrice M sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

avec a, b, c, d des réels à déterminer. On a

$$I_2 = AM = \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a+c & = & 1 \\ 2b+d & = & 0 \\ a+c & = & 0 \\ b+d & = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a & = & 1 \\ b & = & -1 \\ c & = & -1 \\ d & = & 2 \end{cases}$$

Finalement,

$$\exists M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ AM = I_2.$$

Donc la matrice A est inversible.

Vérification.

$$AM = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad \checkmark$$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \qquad \checkmark$$

Exemple 3.3 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons, par l'absurde, que A n'est inversible pas.

Supposons par l'absurde que A est inversible, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AM = I_2$. Notons M sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

avec a, b, c, d des réels. Comme M est l'inverse de A, on a

$$I_2 = AM = \begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a+2c & = & 1 \\ 2b+2d & = & 0 \\ a+c & = & 0 \\ b+d & = & 1 \end{cases}$$

En particulier, on obtient $b + d = 1 = 0$, ce qui est faux. Donc la matrice A n'est pas inversible.

Exemple 3.4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A^3 - 3A - 2I_n = 0_n.$$

Montrons que A est inversible, c'est-à-dire cherchons une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AM = I_n$.

On a

$$A^3 - 3A - 2I_n = 0_n \quad \iff \quad A^3 - 3A = 2I_n \quad \iff \quad \frac{1}{2}\left(A^3 - 3A\right) = I_n \quad \iff \quad A \times \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right) = I_n$$

Donc A est inversible et son inverse est donné par $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I_n\right)$.

Exemple 3.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq 3I_3$, qui vérifie $A^2 = 3A$. Montrons, par l'absurde, que A n'est pas inversible.

Supposons par l'absurde que A est inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Alors, on a

$$\begin{array}{lll} & A^2 = 3A & \text{d'après l'énoncé} \\ \text{donc} & A \cdot A = 3 \cdot A & \\ \text{donc} & A \cdot A \cdot A^{-1} = 3A \cdot A^{-1} & \text{en multipliant à droite par } A^{-1} \\ \text{donc} & A \cdot I_n = 3 \cdot I_n & \text{car } A \cdot A^{-1} = I_n \\ \text{donc} & A = 3 \cdot I_n & \end{array}$$

Or, la dernière égalité est absurde. Donc, cela démontre que la matrice A n'est pas inversible.

Proposition 3.6 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices inversibles.

1. Alors, A^{-1} est inversible et
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
2. Alors, AB est inversible et
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
3. Alors A^T est inversible et
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Démonstration. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices inversibles.

1. On a
$$A^{-1} \cdot A = I_n$$
Donc la matrice A^{-1} est inversible et son inverse vaut A.
2. On a
$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
Donc la matrice AB est inversible et son inverse vaut $B^{-1}A^{-1}$.
3. On a
$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$
Donc A^T inversible, d'inverse $(A^{-1})^T$.

■

! Attention aux simplifications abusives. De manière générale, $AB = AC$ n'implique par $B = C$. C'est vrai seulement si A est **inversible**. En effet, si A est inversible, on a

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC \quad \text{donc} \quad I_nB = I_nC \quad \text{donc} \quad B = C$$

De la même manière, de manière générale $BA = CA$ implique $B = C$ seulement si A est **inversible**.

3.2 Cas particuliers à connaître

Proposition 3.7 — Matrice nulle et identité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La matrice identité I_n est inversible et $(I_n)^{-1} = I_n$.
2. La matrice nulle 0_n n'est pas inversible.

Proposition 3.8 — Cas des matrices 2×2. Soient a, b, c, d des réels et

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On note, $\det(A)$, le **déterminant** de la matrice A, donné par

$$\det(A) = ad - bc.$$

Alors,

$$A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0.$$

Et dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple 3.9 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrons que A est inversible.

On a

$$\det(A) = 2 \times 4 - 3 \times 1 = 5 \neq 0.$$

Donc A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérification. ✓

Exemple 3.10 On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrons que B n'est pas inversible.

On a

$$\det(B) = 2 \times 2 - 4 \times 1 = 0.$$

Donc B n'est pas inversible.

Exemple 3.11 — **Adapté d'Ecricome 2018.** Pour quelle·s valeur·s de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_2$ suivante est telle inversible, où la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, la matrice $A - \lambda I_2$ est donnée par

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5}-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Puis, la matrice $A - \lambda I_2$ étant une matrice 2×2, on a

$$\begin{aligned} A - \lambda I_2 \text{ est inversible} \quad & \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_2) \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad (1+\sqrt{5}-\lambda)(1-\lambda) - 1 \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - (2+\sqrt{5})\lambda + \sqrt{5} \neq 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\} \end{aligned}$$

en résolvant l'équation de second degré qui apparaît.

Proposition 3.12 — **Cas des matrices diagonales.** Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale, donnée par

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$D \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], a_i \neq 0.$$

Dans ce cas,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.13 On considère la matrice D_1, donnée par

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que D_1 est inversible et donner son inverse.

D_1 est une matrice diagonale, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible et son inverse est donné par

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérification.

$$D_1 D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \checkmark$$

Exemple 3.14 On considère la matrice D_2, donnée par

$$D_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que D_2 n'est pas inversible.

D_2 est une matrice diagonale et un de ses coefficients diagonaux est nul, donc la matrice n'est pas inversible.

Proposition 3.15 — **Cas des matrices triangulaires.** Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemple 3.16 On considère la matrice T_1, donnée par

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que T_1 est inversible.

T_1 est une matrice triangulaire supérieure, et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible.

Exemple 3.17 On considère la matrice T_2, donnée par

$$T_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que T_2 n'est pas inversible.

T_2 est une matrice triangulaire inférieure et un de ses coefficients diagonaux est nul, donc la matrice n'est pas inversible.

! L'argument « tous les coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice est inversible » n'est valable que pour les matrices diagonales ou triangulaires. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a tous ses coefficients diagonaux non nuls pourtant elle n'est pas inversible car $\det A = 0$.

4 Lien entre systèmes et matrices

4.1 Écriture matricielle d'un système

On a

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \iff AX = B,$$

avec

- la **matrice** A des **coefficients** du système, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- la matrice **colonne** B du **second membre**, donné par

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- la matrice **colonne** X des **inconnues** du système

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Exemple 4.1

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

En effet,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

4.2 Application : calcul de l'inverse d'une matrice

Proposition 4.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$A \text{ est } \underline{\text{inversible}} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ l'équation } AX = B \text{ admet une } \underline{\text{unique}} \text{ solution}$$

Dans ce cas, la solution du système est

$$X = A^{-1}B$$

et le système est appelé un **système de Cramer**.

Cette proposition permet de

1. Calculer l'unique solution du système associé à $AX = B$, lorsque que l'on sait que A est inversible et que l'on connaît son inverse ;
2. Montrer que A est inverse et calculer son inverse, en montrant que le système associé à $AX = B$ admet une unique solution ;
3. Montrer que A n'est pas inversible en montrant que le système associé à $AX = B$ n'admet pas qu'une unique solution.

Exemple 4.3 — **Utilisation 1.** On considère le système linéaire suivant

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 10y & + & 2z & = & -3 \end{array} \right.$$

1. Donner l'écriture matricielle de ce système.

   On a $(S) \Leftrightarrow AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -10 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Donner l'ensemble des solutions de ce système en admettant que A est inversible et que son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -26 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \\ 4 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

   Comme A est inversible, le système (S) se résout par *équivalence* de la manière suivante,

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad AX = B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

   Ainsi, le système (S) admet une unique solution donnée par

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & -26 & -4 \\ -1 & -5 & -1 \\ 4 & 14 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Exemple 4.4 — **Utilisation 2.** On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Soient

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}
AX = B \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y + z = a \\ x + y = b \\ x + y + z = c \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = b & L_2 \leftrightarrow L_1 \\ y + z = a \\ x + y + z = c \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = b \\ y + z = a \\ z = c - b & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = -a + c \\ y = a + b - c \\ z = -b + c & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} -a + c \\ a + b - c \\ -b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \qquad \checkmark$$

Exemple 4.5 — **Utilisation 3.** On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrons que A n'est pas inversible.

Pour montrer que A n'est pas inversible, on montre que l'équation $AX = 0_{3,1}$ admet une infinité de solutions. On a

$$\begin{aligned}
AX = 0_{3,1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ -y - z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$AX = 0_{3,1} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$$

Donc, l'équation $AX = 0_{3,1}$ admet une infinité de solutions, données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc la matrice A n'est pas inversible.

4.3 Application : étude de suites récurrentes linéaires

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Pour trouver son terme général, on étudie son équation caractéristique qui est donnée par

$$r^2 = 5r - 6 \iff r^2 - 5r + 6 = 0.$$

C'est une équation de second degré dont le discriminant est donné par $\Delta = 1$. Comme $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles, données par $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$. Ainsi, il existe deux constantes A et B telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A \times 2^n + B \times 3^n.$$

On détermine ensuite les valeurs de A et B grâce aux deux premiers termes de la suite.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -2^n + 3^n.$$

Le but de cet exercice est de prouver cette formule à l'aide des outils du calcul matriciel. La méthode est détaillée ci-dessous.

1. (a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$
   (b) En déduire que,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
2. On note
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
   (d) Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (e) En déduire, l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (f) En déduire les valeurs de u_n en fonction de n.
   (g) Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 5u_{n+1} - 6u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_n \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Le raisonnement avec les « ... » est à formaliser rigoureusement avec une récurrence.
2. On a $\det(P) = 1 \neq 0$. Donc P est inversible et son inverse est donné par
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
3. On a
$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

5. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
   - *Initialisation.* Montrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Comme $A^0 = I_2$, et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $A = PDP^{-1}$, on a

     $$A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

     Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   - *Conclusion.* Donc, par principe de récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n - 2^n \\ 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

   En particulier, on en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n - 2^n.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_n = 3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \to +\infty.$$