TD 12 – Calcul Matriciel

Exercice 1 – Écriture de matrices. Écrire en extension les deux matrices suivantes, puis donner leur taille et l'espace $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dans lequel elles vivent.

$$A = (i\times j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 5\\1\leqslant j\leqslant 4}} \quad \text{et} \quad B = (\min(i,j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\1\leqslant j\leqslant 4}}$$

Exercice 2 – Opérations sur les matrices. On considère les deux matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

Calculer $3A-B$, $2I_2+A$ et $3(A-2B)$.

Exercice 3 – Multiplication de matrices. Calculer les produits suivants

a) $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Exercice 4 – Gare aux identités remarquables chez les matrices.... On considère les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$. Que constate-t-on ?
2. Calculer A^2-B^2 et $(A+B)(A-B)$. Que constate-t-on ?

Exercice 5 – Opérations sur les matrices. Soient A, B, C trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Développer les expressions matricielles suivantes.

   i) $A(B+C)$ ii) $(A+B)^2$ iii) $A(A^2+B+I_n)$

2. Factoriser les expressions matricielles suivantes.

   i) $M^2+3M+MA$ ii) $AM-2M$ iii) M^3+3M^2-2M

Exercice 6 – Transposée de matrices. Donner la transposée des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 1 & 4\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Exercice 7 – Puissances d'une matrice. Soient a, b et c des réels. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, A^n.

Exercice 8 – Puissances d'une matrice. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, A^n.

Exercice 9 – Puissances d'une matrice. Soit $a\in\mathbb{R}$. On considère les matrices

$$U = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix}1 & a & a\\a & 1+\frac{a^2}{2} & \frac{a^2}{2}\\-a & -\frac{a^2}{2} & 1-\frac{a^2}{2}\end{pmatrix}$$

1. Calculer U^2.
2. Trouver $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $M = \alpha I_3+\beta U+\gamma U^2$.

Exercice 10 – Matrices inversibles, cas particuliers. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donner leur inverse.

a) $\begin{pmatrix}4 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4 & -1\\-8 & 2\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\0 & 5 & -7\\0 & 0 & 8\end{pmatrix}$

Exercice 11 – Matrices inversibles.

1. Montrer que la matrice suivante est inversible et donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. En déduire (sans faire le pivot de Gauss !) que le système suivant admet une unique solution que l'on donnera,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases}$$

Exercice 12 – Matrices symétriques. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique.
2. Montrer que si B est symétrique alors $A^T B + BA$ est symétrique.
3. Montrer que si A et B sont symétriques, alors $A + B$ est symétrique.

Exercice 13 – (⋆) Polynômes annulateurs.

1. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3$.
   (b) En déduire que A est inversible et donner son inverse.

2. On considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $A^2 = 6A$.
   (b) En raisonnant par l'absurde, en déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 14 – (⋆) Diagonalisation. On considère les deux matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
4. Montrer par récurence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.

Exercice 15 – (⋆) Lien avec les suites récurrentes d'ordre 2, Problème Classique. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

1. (a) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de D^n.
   (d) Montrer par récurence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (e) En déduire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 + (-3)^{n+1} & -1 + (-3)^n \\ -3 - (-3)^{n+1} & -3 - (-3)^n \end{pmatrix}$$

   (f) En déduire les valeurs de u_n et v_n en fonction de n.
   (g) Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.