

TD 08 – CALCUL MATRICIEL (CORRECTION)
Exercice 1 – .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – .

$$\bullet 3A - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\bullet 2I_2 + A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\bullet 3(A - 2B) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$

f) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4 – .

1. $(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -4 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ alors que $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ alors que $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 5 – 1. i) $A(B + C) = AB + AC$

ii) $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

iii) $A(A^2 + B + I_m) = A^3 + AB + A$

2. i) $M^2 + 3M + MA = M(M + 3I_n + A)$

ii) $AM - 2M = (A - 2I_m)M$

iii) $M^3 + 3M^2 - 2M = M(M^2 + 3M - 2I_m)$
 $= (M^2 + 3M - 2I_m)M$

Exercice 6 – $\bullet A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \bullet B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \bullet C^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 7 –

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$$

(à démontrer par récurrence)

Exercice 8 – $A^0 = I_3$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

(à démontrer par récurrence)

Exercice 9 – 1. $U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $M = I_3 + aU + \frac{a^2}{2}U$

Exercice 10 – a) Inversible car $\det = 6 \neq 0$ et son inverse vaut

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Pas inversible ($\det = 0$)

c) Pas inversible (matrice diagonale car un zéro sur la diagonale)

d) Inversible et son inverse vaut

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(matrice diagonale avec tous} \\ \text{ses coeff diagonaux non nuls} \end{array}$$

e) Inversible (mais a priori on ne connaît pas son inverse) (matrice triangulaire avec tous ses coeff diagonaux non nuls)

f) Pas inversible. (car matrice triangulaire avec un zéro sur la diagonale)

Exercice 11 –

1. Montrons que A est inversible en montrant que $\forall B \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = B$ (d'inconnue $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$) admet une unique solution.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} AX = B &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = b \\ x + 2z = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = b \\ -y = b - 2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + z = c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = b \\ y = 2a - b \\ -y + z = c - a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = b \\ y = 2a - b \\ z = a - b + c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a + 2b - c \\ y = 2a - b \\ z = a - b + c \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -2a + 2b - c \\ 2a - b \\ a - b + c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\forall B$, l'équation $AX = B$ admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} B$$

Donc la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vérification.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \quad \quad = I_3 \checkmark
\end{aligned}$$

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par équivalence.

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ x + 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Donc le système (S) admet une unique solution donnée par

$$(5, -1, -3)$$

- Vérification.

$$\begin{cases} 5 - 1 - 3 = 1 \\ 2 \times 5 - 1 + 2 \times (-3) = 3 \\ 5 + 2 \times (-3) = -1 \end{cases}$$

Exercice 12 – 1. On a :

$$\begin{aligned}(A^T A)^T &= A^T (A^T)^T \\ &= A^T A\end{aligned}$$

Donc $A^T A$ est symétrique.

2. On a :

$$\begin{aligned}(A^T B + BA)^T &= (A^T B)^T + (BA)^T \\ &= B^T (A^T)^T + A^T B^T \\ &= B^T A + A^T B^T \\ &= BA + A^T B \\ &= A^T B + BA\end{aligned}$$

Donc $A^T B + BA$ est symétrique.

3. On a :

$$\begin{aligned}(A + B)^T &= A^T + B^T \\ &= A + B\end{aligned}$$

Donc $A + B$ est symétrique.

Exercice 13 – 1. (a) Calculs...

(b) Raisonnons par équivalence. On a :

$$\begin{aligned}A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0_3 &\Leftrightarrow A^3 - A^2 + 2A = -11I_3 \\ &\Leftrightarrow A(A^2 - A + 2I_3) = -11I_3 \\ &\Leftrightarrow A \times \left(-\frac{1}{11}(A^2 - A + 2I_3)\right) = I_3\end{aligned}$$

Ainsi, il existe

$$B = -\frac{1}{11}(A^2 - A + 2I_3)$$

telle que $AB = I_3$.

Donc la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}(A^2 - A + 2I_3)$$

2. (a) Calculs... (B) Raisonnons par l'absurde.

Supposons par l'absurde que la matrice A est inversible. D'après la question précédente, on a

$$A^2 = 6A$$

donc $A^2 \times A^{-1} = 6A \times A^{-1}$ (licite car A est supposée inversible) Donc

$$A = 6I_3$$

or cette égalité est absurde. Donc A n'est pas inversible.

Exercice 14 – 1. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. D'abord:

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ensuite:

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

qui est bien diagonale.

3. Puisque D est diagonale :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

4.

On a $A = PDP^{-1}$. Par récurrence (initialisation à $n = 1$, hérédité immédiate), on obtient

$$A^n = PD^nP^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. On calcule explicitement :

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Après multiplication, on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n + 4^n - 1 & 1 - 4^n & (-2)^n + 4^n - 2 \\ (-2)^n - 4^n & 4^n & (-2)^n - 4^n \\ 1 - 4^n & 4^n - 1 & 2 - 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 15 – 1.a)

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Donc on choisit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Comme $X_{n+1} = AX_n$, par itération on obtient immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0$$

et ici $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **2.a)** Le déterminant de P est

$$\det(P) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -1 - 3 = -4 \neq 0$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b)

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Puis

$$D = P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Étant donné la forme diagonale de D ,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

d)

On a $A = PDP^{-1}$. Pour $n = 1$ l'égalité est vraie. Si $A^n = PD^nP^{-1}$ alors

$$A^{n+1} = A^n A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$$

Par récurrence l'égalité vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.e) Calculons $A^n = PD^nP^{-1}$. D'abord

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n \\ 3 & -(-3)^n \end{pmatrix}$$

Multiplions maintenant par $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$. On obtient après calcul :

$$A^n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + 3(-3)^n & 1 - (-3)^n \\ 3 - 3(-3)^n & 3 + (-3)^n \end{pmatrix}$$

(On peut vérifier en posant $n = 1$ que cette formule donne bien A .)

f)

Pour tout n entier naturel,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - (-3)^n \\ 3 + (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$u_n = \frac{1 - (-3)^n}{4}, \quad v_n = \frac{3 + (-3)^n}{4}$$