Devoir maison 2

Exercice 1 – .

1.
$$v_0 = u_1 - u_0 = 2 \text{ et } v_1 = u_2 - u_1 = -3.$$

Pour $n \in \mathbf{N}, v_{n+2} = u_{n+3} - u_{n+2}$

$$\begin{aligned} &= 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n + 2^n - u_{n+2} \\ &= u_{n+2} - u_{n+1} + 6u_{n+1} - 6u_n + 2^n \\ &= v_{n+1} + 6v_n + 2^n \quad (\mathscr{R}) \end{aligned}$$

2. Soit (w_n) géométrique de raison 2 : $\forall n \in \mathbf{N}, w_n = w_0 \times 2^n$. Alors (w_n) vérifie ($\mathscr{R}$) si et seulement si : $\forall n \in \mathbf{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + 6w_n + 2^n$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, w_0 2^{n+2} = w_0 2^{n+1} + 6w_0 2^n + 2^n \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, 4w_0 = 2w_0 + 6w_0 + 1 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N}, w_0 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

La seule suite géométrique de raison 2 vérifiant $(\mathscr{R})$ est celle de premier terme $w_0 = -\frac{1}{4}$.

3. (a) $x_0 = v_0 - w_0 = \frac{9}{4}$ et $x_1 = v_1 - w_1 = -\frac{5}{2}$.
Soit $n \in \mathbf{N}, x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = (v_{n+2} - v_{n+1} - 6v_n) - (w_{n+2} - w_{n+1} - 6w_n) = 2^n - 2^n = 0$. La suite (x_n) vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $\forall n \geqslant 0, x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$.
(b) L'équation caractéristique de cette relation de récurrence est : $r^2 - r - 6 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 > 0$
Donc elle possède 2 solutions réelles distinctes :
$r_1 = -2$ et $r_2 = 3$.
On sait alors qu'il existe des constantes A, B telles que : $\forall n \in \mathbf{N}, x_n = A(-2)^n + B.3^n$. $x_0 = \frac{9}{4}$ et $x_1 = -\frac{5}{2}$ permettent d'écrire :
$\begin{cases} A + B = \frac{9}{4} \\ -2A + 3B = -\frac{5}{2} \end{cases}$ d'où : $A = \frac{37}{20}$ et $B = \frac{2}{5}$.
On a donc : $\forall n \geqslant 0, x_n = \frac{37}{20}(-2)^n + \frac{2}{5} \times 3^n$. Enfin, $v_n = x_n + w_n$ donc : $\forall n \in \mathbf{N}, v_n = \frac{37}{20}(-2)^n + \frac{2}{5} \times 3^n - 2^{n-2}$.

4. Pour tout $n \geqslant 1, \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = u_n - u_0$ (somme téléscopique).
Puisque $u_0 = 0$, il reste : $\forall n \geqslant 1, u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$.

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}^\star, u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{37}{20}(-2)^k + \frac{2}{5} \cdot 3^k - 2^{k-2}\right) = \frac{37}{20} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-2)^k + \frac{2}{5} \sum\limits_{k=0}^{n-1} 3^k - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-2}$
On reconnaît trois sommes géométriques, de raisons différentes de 1 .

$$u_n = \frac{37}{20} \times \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} + \frac{2}{5} \times \frac{1-3^n}{1-3} - \frac{1}{4} \times \frac{1-2^n}{1-2} \qquad \forall n \geqslant 1, u_n = \frac{2}{3} - \frac{37}{60}(-2)^n + \frac{3^n}{5} - 2^{n-2}.$$

remarque : cette formule est encore vraie pour $n = 0$.

Exercice 2 – .

1. (a) f est définie en x tel que $x \neq 0$. $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}^\star$.
   (b) f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas.
   $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$
   Conclusion :

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^x$$

(c) $x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $\forall x \neq 0, x^2 > 0, e^x > 0$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$e-1$	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) g est définie en x tel que $f(x) > 0$.
D'après le tableau de variations de f : $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Conclusion : $\mathscr{D}_g = \mathbf{R}_+^\star$.

(b) g est dérivable sur son ensemble de définition par opérations : $\mathscr{D}_{g'} = \mathbf{R}_+^\star$.
Soit $x > 0$: $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-1}{x^2} e^x \times \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$
Conclusion : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x(e^x - x)}$.

(c) Remarquons que: $\forall x \neq 0, e^x - x = x.f(x)$.
Soit $x > 0$: $f(x) > 0$ d'après le tableau de variations de f, donc $x.f(x) > 0$. Ainsi, $g'(x)$ est du signe de $x-1$.
On obtient donc le tableau de variations suivant pour g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	$\ln(e-1)$	$\nearrow$	$+\infty$