Mathématiques – ECG1 Corrigé Interro 7

Interrogation du 17/11/2025

1. La matrice est de taille 2×2 . On calcule donc son déterminant:

$$det A = 1 \times 4 - 1 \times 2$$
$$= 2$$

Comme $\det A \neq 0$, la matrice A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{array} \right)$$

Vérification:

$$A \times A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= I_2 \quad \checkmark$$

2. La matrice A est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Donc la matrice A est inversible et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Vérification:

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mathématiques – ECG1 Corrigé Interro 7

3. on a:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2z = a \\ x + y + 2z = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y + 2z = a \\ 2y + 3z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y + 2z = a \\ -z = c - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y + 2z = a \\ -z = c - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = b \\ y = 2c - 3a \\ z = -c + a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + b \\ y = -3a + 2b \\ z = 2a - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -a + b \\ -3a + 2c \\ 2a - c \end{pmatrix}$$

Donc l'équation AX = B admet une unique solution donnée par

$$X = \begin{pmatrix} -a+b \\ -3a+2c \\ 2a-c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc la matrice A est inversible et son inverse ett donné par

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$