COLLE 12 - *Semaine du 18/12 au 22/12*

La colle débutera par une question de cours et un exercice de cours.

NOTE : Le chapitre “Limites de suites” est encore au programme, mais les interrogations porteront principalement sur le chapitre “Calcul Matriciel”.

Chapitre XI - Limites de suites

- Définition de convergence vers un réel, vers $\pm\infty$ en terme de quantificateurs
- Limites usuelles (puissances, exponentielle, logarithme, suites géométriques)
- Opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composition) avec les quatre formes indéterminées à connaître
- Croissances comparées pour résoudre les formes indéterminées dans certains cas
- Théorèmes d’existence : par encadrement, théorème de la limite monotone
- Propriétés théoriques sur les suites : toute suite convergente est bornée, passage à la limite dans une inégalité
- Suites extraites
- Suites adjacentes : définition, deux suites adjacentes convergent et ont la même limite

Chapitre XII - Calcul matriciel

- Notion de matrice, écriture compacte ou en extension
- Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- Matrice nulle et identité
- Matrice diagonale, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure
- Opérations : addition de deux matrices, multiplication d’une matrice par un scalaire, multiplication de deux matrices, puissance d’une matrice carrée
- Matrice transposée
- Matrice symétrique
- Matrice inversible : définition, cas particuliers (matrices 2×2, matrices diagonales, triangulaires, cas général pour trouver l’inverse en passant par un système linéaire

Informatique

- Calculs simples en python : `+,-,*,/,**`
- Définir une variable. Afficher une valeur avec `print`.
- Charger la bibliothèque numpy (`import numpy as np`), fonctions usuelles : `np.exp, np.log, np.sqrt`
- Instruction conditionnelle `if...elif...else`
- Les listes
- Boucles `for`
- Boucles `while`
- Fonctions

Questions de cours & exercices de cours

Une question de cours et un exercice du cours seront demandés parmi les suivants.

Un énoncé :

☐ Syntaxe d’une boucle `for` *(TP 5)*

```
for element in sequence:
    bloc d'instructions
```

☐ Syntaxe d'une boucle `while` *(TP 7)*

```
initialisation
while condition:
    bloc_instructions
```

☐ Syntaxe d'une fonction `while` *(TP 9)*

```
def nomfonction(argument1, argument2, ...):
        instruction
        return(result)
```

☐ Définition de l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *(Chapitre XII - Def 1.4)*
☐ Définition de la matrice nulle $0_{n,p}$ et de la matrice identité I_n *(Chapitre XII - Def 1.8)*
☐ Définition de matrice diagonale, triangulaire sup et inf *(Chapitre XII - Def 1.10)*
☐ Relation de compatibilité pour faire le produit AB et taille de la matrice produit *(Chapitre XII - Rem sous Def 2.9)*
☐ Définition de matrice inversible *(Chapitre XII - Def 3.1)*
☐ Critère d'inversibilité pour les matrices 2×2 *(Chapitre XII - Prop 3.8)*
☐ Critère d'inversibilité pour les matrices diagonales *(Chapitre XII - Prop 3.11)*
☐ Critère d'inversibilité pour les matrices triangulaires *(Chapitre XII - Prop 3.14)*
☐ Lien inversibilité et résolution de l'équation $AX = B$ *(Chapitre XII - Prop 4.2)*

Un exercice :

☐ Calculer le produit des deux matrices suivantes *(Chap XII - Ex. 2.10)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

☐ Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p, où $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par, *(Chap XII - Ex. 2.19)*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ Donner la transposée des deux matrices suivantes *(Chap XII - Ex. 2.22)*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

☐ Déterminer l'inversibilité des deux matrices suivantes *(Chap XII - Ex. 3.9 et 3.10)*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

☐ Déterminer l'inversibilité des deux matrices suivantes *(Chap XII - Ex. 3.12 et 3.13)*

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☐ Déterminer l'inversibilité des deux matrices suivantes *(Chap XII - Ex. 3.15 et 3.16)*

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

☐ Écrire un programme calculant *(TP 6)*

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2}$$

☐ On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2n+1}$. Écrire un programme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $v_n < 0,001$. *(TP 7)*

☐ Écrire une fonction qui prend un argument un nombre réel x et qui renvoie $2x-1$ si $x \leqslant 2$ et qui renvoie $\ln(x)$ si $x > 2$.