

Interrogation du 18/12/2023

NOM Prénom :

1. Déterminer la limite suivante. *Justifier au maximum.*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+4}{3n+n^2}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \frac{n+4}{3n+n^2} &= \frac{n \left(1 + \frac{4}{n}\right)}{n^2 \left(\frac{3}{n} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \end{aligned}$$

On $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4}{n} = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+4}{3n+n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{1 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 0$ par produit

2. Déterminer la limite suivante. *Justifier au maximum.*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} + 2^n}{3^n + \ln(n)}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $m > 2$. On a

$$\begin{aligned} \frac{e^{-n} + 2^n}{3^n + \ln(n)} &= \frac{2^n \left(\frac{e^{-n}}{2^n} + 1\right)}{3^n \left(1 + \frac{\ln(n)}{3^n}\right)} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\left(e^{-n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)}{\left(1 + \frac{\ln(n)}{3^n}\right)} \end{aligned}$$

On $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{3^n} = 0$ par croissances comparées donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(n)}{3^n} = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} + 2^n}{3^n + \ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{\left(e^{-n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)}{\left(1 + \frac{\ln(n)}{3^n}\right)} = 0$

Tournez la page →

3. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Justifier que la matrice A est inversible.

la matrice A est triangulaire supérieure
et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls
donc A est inversible.

(b) Soit

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Montrer que l'équation $AX = B$ admet une unique solution.

On a :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - b \\ y = b - c \\ z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$$

Donc l'équation $AX = B$ admet une unique solution donnée par

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) En déduire l'inverse de A .

$$\text{Donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} A A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_3 \quad \checkmark \end{aligned}$$