Chapitre 9 : Limites de suites

1 Limite d'une suite

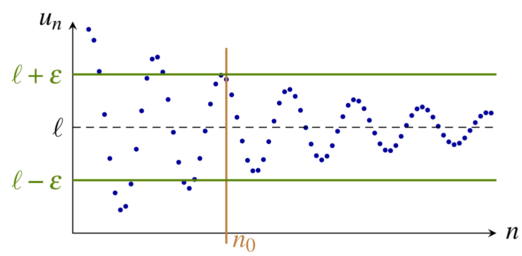
1.1 Suites convergentes

Définition 1.1 On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $\ell \in \mathbb{R}$ si

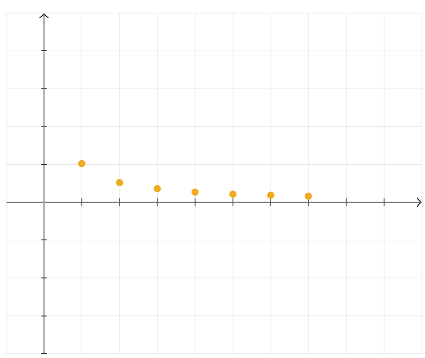
$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{Pour toute précision (aussi petite soit-elle) } \varepsilon>0}, \quad \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{il existe un rang } n_0}, \quad \underbrace{\forall n \geqslant n_0}_{\text{à partir duquel}}, \quad \underbrace{u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]}_{\text{tous les termes sont dans la bande de largeur } \varepsilon \text{ autour de } \ell}$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie alors celle-ci est **unique**. On note

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$



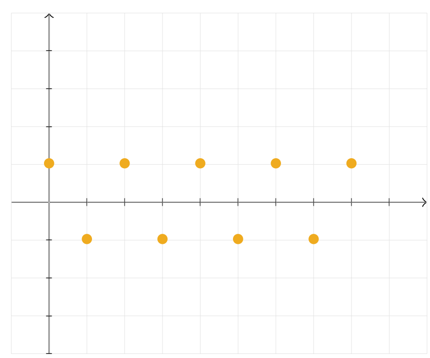
Exemple 1.2 Conjecturer la limite des suites suivantes à partir de leur représentation dans le plan.



Représentation dans le plan de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n}$$

Conjecture à partir du graphe :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.
- Et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

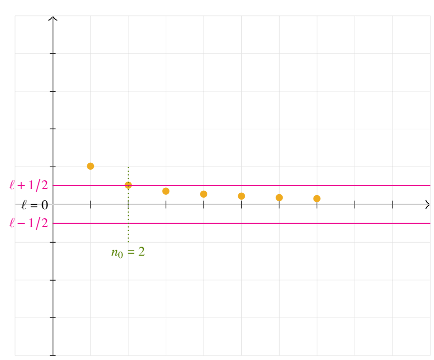


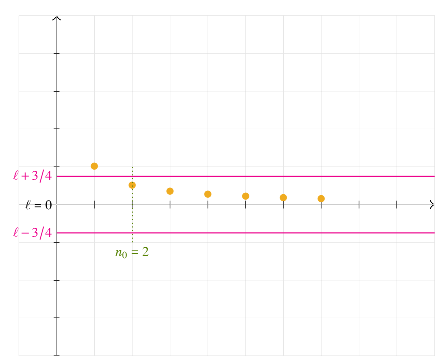
Représentation dans le plan de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = (-1)^n$$

Conjecture à partir du graphe :
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Exemple 1.3 Démontrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.





Soit $\varepsilon > 0$. Il existe

$$n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$$

tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \in [0-\varepsilon, 0+\varepsilon].$$

1.2 Suites divergeant vers l'infini

Définition 1.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

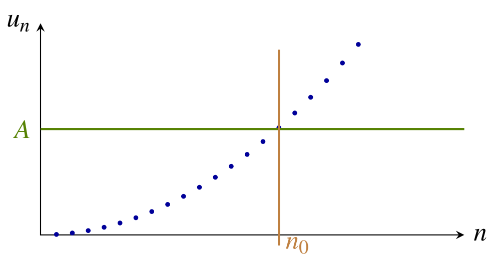
1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $+\infty$, ce que l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, lorsque :

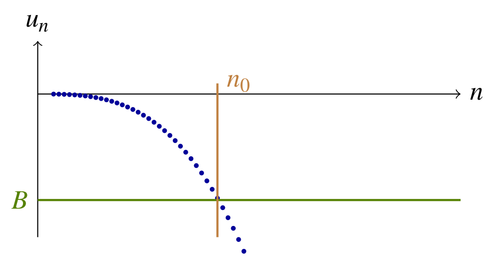
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A.$$

2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **tend vers** $-\infty$, ce que l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, lorsque :

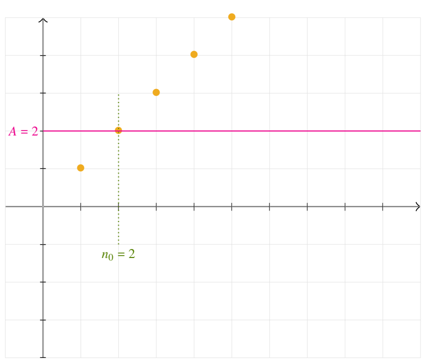
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant B.$$

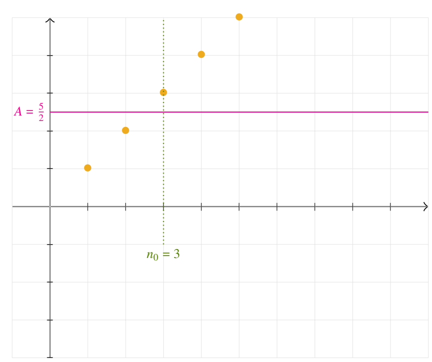
Dire qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ signifie que, quel que soit le réel A (aussi grand soit-il), on peut trouver un rang (donné par n_0) à partir duquel tous les termes de la suite $(u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots)$ sont supérieurs à A.





Exemple 1.5 Démontrer que la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.





Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe

$$n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$$

tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \geqslant A.$$

1.3 Limites possibles pour une suite

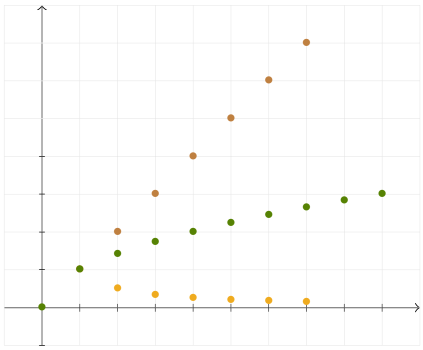
En résumé, une suite au voisinage de $+\infty$ peut se comporter de trois manières possibles.

- Soit elle admet une limite finie.
- Soit elle diverge vers $\pm\infty$ (phénomène "*d'explosion*").
- Soit elle n'admet pas de limite (phénomène "*oscillations*").

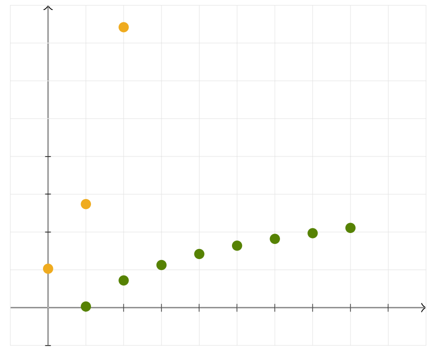
2 Calculs de limite

2.1 Limite de référence

a) Limite des suites usuelles.



Représentation dans le plan des suites :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$

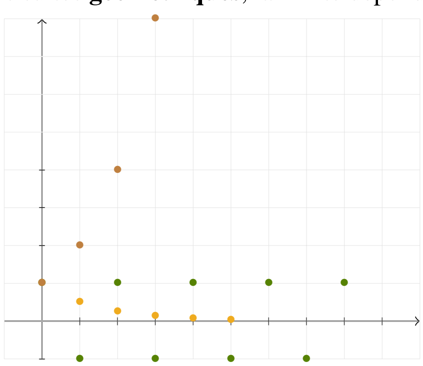


Représentation dans le plan des suites :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \exp(n)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln n$

	Limite	Exemples	Exemples
Puissance positive ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} = +\infty$
Puissance négative ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-7} = 0$
Racine carrée	$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$		
Exponentielle ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(an) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(n) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \exp(\frac{n}{2}) = +\infty$
Logarithme ($a > 0$)	$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(n))^a = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(n))^{\frac{1}{3}} = +\infty$

b) Limite d'une suite géométrique.

Pour les suites **géométriques**, la limite dépend de la raison.



Représentation dans le plan des suites :
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\ (q = 1/2 \in]-1,1[)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n\ (q = -1 \leqslant -1)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n\ (q = 2 > 1)$

Raison	Limite	Exemples	Exemples
Si $q \in]-1,1[$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{8}\right)^n = 0$
Si $q > 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$
Si $q = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$	
Si $q \leqslant -1$	$(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge	$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge	$((-3)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

2.2 Opération sur les limites

À partir des limites usuelles, on peut en déduire des nouvelles limites en effectuant des opérations sur les limites. Dans les tableaux, **FI** signifie **forme indéterminée**. Cela veut dire que l'opération n'a pas de résultat général, il faudra traiter les exemples au cas pas cas. Les cases non remplies se déduisent par symétrie.

a) Somme

Limite éventuelle de $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$		$+\infty$	**FI**
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$			$-\infty$

Pour la **forme indéterminée** « $+\infty-\infty$ », il faut traiter au cas par cas.

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} -n = -\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} (n-n) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} -n = -\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} (2n-n) = +\infty$$

b) Multiplication par une constante non nulle a

Limite de $(a\times u_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
Si $a>0$	$a\times\ell$	$+\infty$	$-\infty$
Si $a<0$	$a\times\ell$	$-\infty$	$+\infty$

c) Produit

Limite éventuelle de $(u_n\times v_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2 > 0$	$\ell_1\times\ell_2$		0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2 < 0$			0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$			0	**FI**	**FI**
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$				$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$					$+\infty$

Pour la **forme indéterminée** « $0\times\infty$ », il faut traiter au cas par cas.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\times n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\times n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\times n = 0$$

c) Quotient

On suppose ici que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.

Limite évent. de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell_1 < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$		0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_2 < 0$			0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^-$	$-\infty$	$+\infty$	**FI**	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$	0	0	0	**FI**	**FI**

Pour la **forme indéterminée** « $0/0$ », il faut traiter au cas par cas.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 0$$

Pour la **forme indéterminée** « ∞/∞ », il faut traiter au cas par cas.

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Exemple 2.1 Calculer les limites suivantes.

Suite	Raisonnement	Limite
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + \frac{1}{n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = -2\ln(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$ et $-2 < 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\ln(n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$ et $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ par somme	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{\mathrm{e}^{-n}-1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{e}^{-n} - 1) = -1$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Proposition 2.2 — **Composition de limites.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et f une fonction telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n)$ est bien définie. Si,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\ell} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \alpha.$$

Exemple 2.3 Calculer les limites suivantes.

Suite	Raisonnement	Limite
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{-n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{2+\frac{1}{n}}$	$\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n} = 2$ et $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x} = \sqrt{2}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$

2.3 Résoudre une forme indéterminée

a) Croissances comparées

Il y a 4 formes indéterminées :

$$\text{« } +\infty-\infty \text{ »} \qquad \text{« } 0\times\infty \text{ »} \qquad \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »}$$

Le théorème suivant donne la résolution de ces formes indéterminées dans certains cas bien particuliers.

Proposition 2.4 — **Croissances comparées.** Soient $a>0, b>0$ et $q>1$. On a

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln(n))^a}{n^b} = 0$ ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{q^n} = 0$ $\left(\text{en part. } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{\mathrm{e}^{an}} = 0\right)$ iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln n)^a}{q^n} = 0$

On peut retenir que

$$(\ln n)^a << n^b << q^n \text{ (avec } q>1)$$

Lorsqu'on fait face à une forme indéterminée, le plus efficace est de factoriser par le terme dominant puis de conclure en utilisant les croissances comparées.

Exemple 2.5

Suite	FI	Dom.	Factorisation	Limite
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = n^2-3n+2$	$+\infty-\infty$	n^2	$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(n)-n^5$	$+\infty-\infty$	n^5	$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = n^5\left(\frac{\ln n}{n^2}-1\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 3^n-2^n$	$+\infty-\infty$	3^n	$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 3^n\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{2n^3-5n+1}{n^2+1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{n^3}{n^2}$	$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n^3\left(2-\frac{5}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{\mathrm{e}^n+n}{n^2+1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{\mathrm{e}^n}{n^2}$	$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\mathrm{e}^n\left(1+\frac{n}{\mathrm{e}^n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = n^{\frac{1}{n}}$	« ∞^∞ »		$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (n+1)\mathrm{e}^{-n}$	$0\times\infty$ »	e^{-n}	$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{n}{\mathrm{e}^n}+\frac{1}{\mathrm{e}^n}$	$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Exemple 2.6 Déterminer la limite suivante (si elle existe) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\ln(n)+(-1)^n}{2^n-n^5+(\ln(n))^{12}}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On commencer par évaluer la limite "à l'oeil" pour comprendre si on est face à une FI ou pas. On a

$$\lim_{n\to\infty} n^2+\ln(n)+(-1)^n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n-n^5+(\ln(n))^{12} = +\infty$$

Donc, on est face à une FI de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

- Factorisons au numérateur et au dénominateur par le terme dominant.

  On a,
  $$\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{n^2\left(1+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{2^n\left(1-\frac{n^5}{2^n}+\frac{(\ln n)^{12}}{2^n}\right)}$$

- Étudions la limite des termes non dominants.

  Pour le numérateur, on a
  $$\begin{aligned}
  &\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0 && \text{par encadrement car pour tout } n\in\mathbb{N}, \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}\\
  &\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}=0 && \text{par croissances comparées } (n^2 \text{ gagne sur } \ln n)\\
  \text{donc}\quad &\lim_{n\to\infty}1+\frac{\ln(n)}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}=1 && \text{par opération sur les limites}
  \end{aligned}$$

  Pour le dénominateur, on a
  $$\begin{aligned}
  &\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{2^n}=0 && \text{par croissances comparées } (2^n \text{ gagne sur } n^5)\\
  &\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^{12}}{2^n}=0 && \text{par croissances comparées } (2^n \text{ gagne sur } \ln n)\\
  \text{donc}\quad &\lim_{n\to\infty}1-\frac{n^5}{2^n}+\frac{(\ln n)^{12}}{2^n}=1 && \text{par opération sur les limites}
  \end{aligned}$$

  Donc
  $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}}{1-\frac{n^5}{2^n}+\frac{(\ln n)^{12}}{2^n}}=\frac{1}{1}=1$$

- Etudions la limite du terme dominant.

  Par croissances comparées, on a
  $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$$

- Conclusion.

  Donc finalement, par opérations sur les limites
  $$\lim_{n\to\infty}u_n = 0\times 1 = 0.$$

b) Multiplication par la quantité conjuguée

Exemple 2.7 Déterminer la limite suivante (si elle existe) :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

Gestes Invisibles/Automatismes. On commencer par évaluer la limite "à l'oeil" pour comprendre si on est face à une FI ou pas. On a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

Donc, on est face à une FI de la forme « $+\infty - \infty$ ».

- Multiplions par la quantité conjuguée pour déterminer la limite.

  Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

- Conclusion.

  Finalement, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

2.4 Théorèmes d'existence de limites

a) Théorème d'encadrement

Proposition 2.8 **— Existence de limite par encadrement.** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.
On suppose que
(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ (ou seulement à partir d'un certain rang)
(H2) Les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ.
Alors,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie,
- et plus précisément, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Attention, cette proposition est différente de la Proposition 3.5, concernant le passage à la limite dans une inégalité. Dans la Proposition 3.5, on suppose que toutes les suites convergent pour en déduire une information sur leurs limite. Le théorème d'encadement au contraire, sert à montrer qu'une suite converge et donne la valeur de la limite.

Exemple 2.9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \leqslant u_n \leqslant 2n.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\right)$ admet une limite finie et la déterminer.

Gestes Invisibles/Automatismes. On dispose d'un encadrement sur la suite. On va utiliser le théorème des gendarmes pour démontrer que la suite converge.

(H1) Soit $n \geqslant 2$. Alors $u_n \geqslant n > 0$ et donc $\ln(u_n)$ existe. On a

$$\begin{array}{lll} & n \leqslant u_n \leqslant 2n & \text{d'après l'énoncé} \\ \text{donc} & \ln(n) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \ln(2n) & \text{car la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0,+\infty[\\ \text{donc} & \ln(n) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \ln(2) + \ln(n) & \text{par ppté algébrique du log} \\ \text{donc} & 1 \leqslant \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + 1 & \text{car } \ln(n) > 0 \end{array}$$

Donc, on a montré que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 1 \leqslant \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + 1$$

(H2) Les suites $(1)_{n \geqslant 2}$ et $\left(\frac{\ln(2)}{\ln(n)} + 1\right)_{n \geqslant 2}$ convergent vers 1.

Donc, d'après le *théorème d'encadrement*,

- la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie,
- et plus précisément, la suite $\left(\frac{\ln(u_n)}{\ln(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Proposition 2.10 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 0$. On suppose que

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant v_n$ (ou seulement à partir d'un certain rang)

(H2) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors,

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie,
- et plus précisément, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exemple 2.11 Démontrer que la suite $\left(\frac{(-1)^n + 1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

(H1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{array}{rll} \left|\frac{(-1)^n+1}{n}\right| & = \frac{|(-1)^n+1|}{|n|} & \\ & = \frac{|(-1)^n+1|}{n} & \text{car } n > 0 \\ & \leqslant \frac{|(-1)^n|+|1|}{n} & \text{par inégalité triangulaire} \\ & \leqslant \frac{2}{n} & \text{par inégalité triangulaire} \end{array}$$

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left|\frac{(-1)^n + 1}{n}\right| \leqslant \frac{2}{n}$$

(H2) La suite $\left(\frac{2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Donc, par *théorème d'encadrement*,

- la suite $\left(\frac{(-1)^n+1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie,
- et plus précisément, la suite converge vers 0.

Proposition 2.12 — Existence de limite par majoration/minoration. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (ou seulement à partir d'un certain rang).

- [Minoration] Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- [Majoration] Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

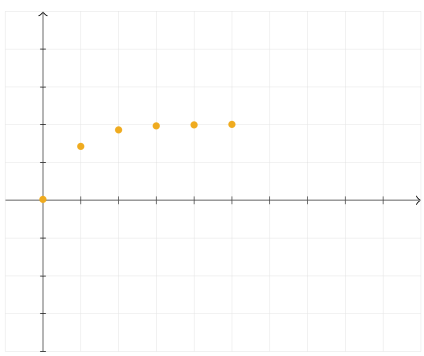
Exemple 2.13 Déterminer la limite des suites suivantes grâce à une minoration/majoration.

Suite	Encadrement	Limite
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n + \ln(n)$	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant -1 + \ln(n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^2 - e^{2n}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \leqslant -n^2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

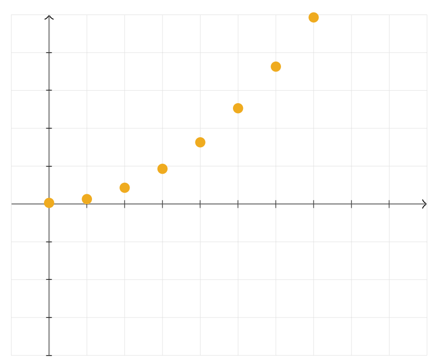
b) Théorème de la limite monotone

Proposition 2.14 — Limite monotone.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **croissante**.
   - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** et alors elle converge.
   - Soit elle diverge vers $+\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **décroissante**.
   - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** et alors elle converge.
   - Soit **Sinon** elle diverge vers $-\infty$.



La suite est croissante et majorée, elle converge vers un réel.



La suite est croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.

Exemple 2.15 On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$u_0 = -3 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3.$$

Montrer que la suite est majorée par 4 et en déduire qu'elle converge vers un réel à déterminer.

Gestes Invisibles/Automatismes. Pour montrer que la suite converge, on va montrer qu'elle est majorée et croissante. Attention, cette méthode permet de démontrer que la suite converge mais ne donne pas la valeur de la limite. Pour trouver la valeur de la limite, on utilise après la relation de récurrence définissant la suite.

- Étape 1 : Montrer que la suite est majorée par 4.
  Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété

  $$\mathbb{P}(n) : "u_n \leqslant 4"$$

  est vraie.
  - Initialisation. Montrons que $\mathbb{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire, montrons que $u_0 \leqslant 4$. D'après l'énoncé, $u_0 = -3$. Donc $\mathbb{P}(0)$ est vraie.

– Hérédité. On suppose que $\mathbb{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, on suppose que $u_n \leqslant 4$. Montrons que $\mathbb{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $u_{n+1} \leqslant 4$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{4}u_n + 3 && \text{d'après l'énoncé} \\ &\leqslant \frac{1}{4} \times 4 + 3 && \text{l'hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant 4 \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(n+1)$ est vraie.

– Conclusion. Par principe de récurrence, on a donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leqslant 4.$$

- Étape 2 : Montrer que la suite converge.

  – On sait déjà que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par 4).
  – Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3 \geqslant -\frac{3}{4} \times 4 + 3 \geqslant 0.$$

  Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

  Donc, par *théorème de la limite monotone*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
- Étape 3 : Déterminer la limite de la suite.
  D'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$$

  Or, d'après l'étape précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient,

$$\ell = \frac{1}{4}\ell + 3.$$

  En résolvant cette équation *par équivalence*, on obtient,

$$\ell = \frac{1}{4}\ell + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4}\ell = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = 4$$

  Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

c) Suites adjacentes

Proposition 2.16 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** lorsque
(H1) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
(H2) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
(H3) et la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Dans ce cas, les deux suites convergent et ont la même limite.

Exemple 2.17 On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les deux suites convergent.

Gestes Invisibles/Automatismes. On demande d'étudier simultanément la convergence de deux suites qui sont imbriquées. On peut essayer de montrer qu'elles sont adjacentes.

Montrons que les deux suites sont adjacentes.

(H1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante car,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0.$$

(H2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante car,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}\left(\frac{2}{n+1} - 1\right) \\ &= \frac{1}{n!} \times \frac{1-n}{n+1} \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

(H3) La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 car,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n - v_n = -\frac{1}{n!} \to 0$$

Donc, les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, donc convergent (vers une même limite).

3 Propriétés sur les limites

3.1 Lien avec les majorations/minorations

Proposition 3.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors elle est bornée.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, mais pas majorée.
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, mais pas minorée.

! Les réciproques sont en général fausses !

- La suite $(-1)^n$ est bornée mais n'est pas convergente (elle diverge).

3.2 Suites extraites

n	0	1	2	3	4	...
u_n	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	...
$v_n = u_{n+1}$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	...
$w_n = u_{n+2}$	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	...
$t_n = u_{n-1}$	–	u_0	u_1	u_2	u_3	...
$p_n = u_{2n}$	u_0	u_2	u_4	u_6	u_8	...
$r_n = u_{2n+1}$	u_1	u_3	u_5	u_7	u_9	...

Proposition 3.2 Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent aussi vers ℓ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{n+2} = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{n-1} = \ell, \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \ell, \qquad \text{etc.}$$

La réciproque est fausse en général : si une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, cela ne veut pas dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

Exemple 3.3 Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de ses deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

- La suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} = 1$$

  Donc la suite extraite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
- La suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+1} = -1$$

  Donc la suite extraite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.
- Mais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (car suite géométrique de raison $q = -1 \geqslant -1$).

Proposition 3.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ont toutes les deux la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

3.3 Passage à la limite dans une inégalité

Proposition 3.5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :
(H1) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_1 ;
(H2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ_2 ;
(H3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ ou $u_n < v_n$.
Alors

$$\ell_1 \leqslant \ell_2$$

Même si l'inégalité sur les termes des suites est stricte, on n'obtient seulement une inégalité large sur les limites.

Exemple 3.6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

On admet les deux assertions suivantes.
(P1) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$ (par *récurence*.)
(P2) On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ (par *théorème de la limite monotone*).
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

- **Gestes Invisibles/Automatismes.** On a un encadrement sur une suite qui converge, on peut en déduire un encadrement sur sa limite
  D'après (P1), on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

  Or, d'après (P2), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Donc en passant à la limite dans cette inégalité, on obtient,

$$0 \leqslant \ell \leqslant 2.$$

- **Gestes Invisibles/Automatismes.** La suite est définie par récurrence et converge. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on peut déduire une relation sur la limite de la suite.
  D'après l'énoncé,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Or, d'après (P2), la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Donc en passant à la limite dans la relation de récurrence, on a

$$\ell = \sqrt{2+\ell}$$

- Comme $\ell \geqslant 0$, on peut résoudre l'équation *par équivalence* de la manière suivante,

$$\begin{aligned}
\ell = \sqrt{2+\ell} \quad & \Longleftrightarrow \quad \ell^2 = 2+\ell \qquad \text{car les deux termes de l'égalité sont positifs} \\
& \Longleftrightarrow \quad \ell^2 - \ell + 2 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \cancel{\ell = -1} \text{ ou } \ell = 2 \qquad \text{en résolvant l'éq. du second degré} \\
& \Longleftrightarrow \quad \ell = 2 \qquad \text{car } \ell \in [0,2]
\end{aligned}$$

- Finalement, on a démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.