# XIII. Factoriel & Coefficients Binomiaux


1 Cardinal d'un ensemble 1
2 La factorielle et les permutations 1
2.1 Rappels sur la factorielle . . . 1
2.2 Permutations . . . 2
3 Les coefficients binomiaux et les combinaisons 2
3.1 Combinaison . . . 2
3.2 Calcul des coefficients binomiaux . . . 3
3.3 Formule du binôme de Newton . . . 5


## 1 Cardinal d'un ensemble

**Définition 1.1** Soit $E$ un ensemble fini. On appelle **cardinal** de $E$ le nombre d'élément de $E$, que l'on note $\text{card}(E)$.

**Exemple 1.2**

| Ensemble | Cardinal |
|---|---|
| $\{1,2,3\}$ | 3 |
| $\{1,3,2\}$ | 3 |
| {élèves en ECG1} | 19 |
| $[0,5]\cap\mathbb{N}$ | 6 |
| $[\![1,n]\!]$ | $n$ |

## 2 La factorielle et les permutations

### 2.1 Rappels sur la factorielle

**Définition 2.1** La *factorielle* d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\times 2\times 3\times\cdots\times n.$$

Par convention, $0! = 1$.

**Exemple 2.2** On a

| $0!$ | $1!$ | $2!$ | $3!$ | $4!$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $1\times 2 = 2$ | $1\times 2\times 3 = 6$ | $1\times 2\times 3\times 4 = 24$ |

**Proposition 2.3** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(n+1)! = n!\times(n+1).$$

**Exemple 2.4** On a

$$5! = 5\times 4! = 5\times 24 = 120$$

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3!}{3!} = 7\times 6\times 5\times 4 = 840$$

## 2.2 Permutations

**Définition 2.5** On appelle **permutation** toute bijection entre deux ensembles finis de même cardinal.

? De manière informelle, le nombre de permutations d'un ensemble est le nombre de façons différentes d'ordonner les éléments d'un ensemble.

**Exemple 2.6** Trois élèves, Pi, Ja et Ma, doivent passer en colle d'anglais. Quels sont les différents ordres de passage possible ? Combien y'en a-t-il ?

Listons toutes les possibilités.

| | | |
|---|---|---|
| Pi - Ja - Ma | Ma - Pi - Ja | Ma - Ja - Pi |
| Pi - Ma - Ja | Ja - Pi - Ma | Ja - Ma - Pi |

En fait,

- on commence par choisir le créneau de Pi : il y a trois possibilités (passer en premier, en deuxième ou en troisième)
- une fois le créneau de Pi choisi, on choisit le créneau de Ja parmi les créneaux restants : il n'y a donc plus que deux possibilités (puisque Pi prend déjà un créneau)
- enfin, le dernière élève, Ma, n'a plus de choix, il ne lui reste plus qu'une possibilité.

On obtient donc

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ permutations possibles.}$$

**Proposition 2.7** Le nombre de permutations d'un ensemble à $n$ éléments est $n!$.

? Dans un ensemble à $n$ éléments,

- on a $n$ choix pour le premier élément à placer,
- une fois le premier élément placé, il reste $n-1$ choix de places restantes pour le deuxième élément (vu que le premier élément occupe déjà une place)
- ...
- puis deux choix pour l'avant dernier élément,
- puis un choix pour le dernier élément.

Finalement, le nombre d'options est

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

# 3 Les coefficients binomiaux et les combinaisons

## 3.1 Combinaison

**Définition 3.1 — Combinaison.** Soient $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leqslant n$. On appelle **combinaison** de $E$ à $k$ éléments le nombre de sous-ensembles de $E$ de cardinal $k$, c'est-à-dire possédant $k$ éléments. Ce nombre est alors noté $\binom{n}{k}$, et appelé **coefficient binomial** $k$ parmi $n$.

**Exemple 3.2** Intéressons nous à l'ensemble suivant

$$E = \{1,2,3\}.$$

1. Quel est le nombre de sous-ensemble à 0 élément ? En faire la liste.

$$\emptyset$$

2. Quel est le nombre de sous-ensemble à 1 élément ? En faire la liste.

$$\{1\} \qquad \{2\} \qquad \{3\}$$

3. Quel est le nombre de sous-ensemble à 2 éléments ? En faire la liste.

$$\{1,2\} \qquad \{1,3\} \qquad \{2,3\}$$

4. Quel est le nombre de sous-ensemble à 3 éléments ? En faire la liste.

$$\{1,2,3\}$$

5. En déduire les valeurs suivantes des coefficients binomiaux.

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

**Exemple 3.3** Intéressons nous à l'ensemble suivant

$$E = \{a,b,c,d,e\}.$$

1. Quel est le nombre de sous-ensemble à 1 élément ? En faire la liste.

$$\{a\} \qquad \{b\} \qquad \{c\} \qquad \{d\} \qquad \{e\}$$

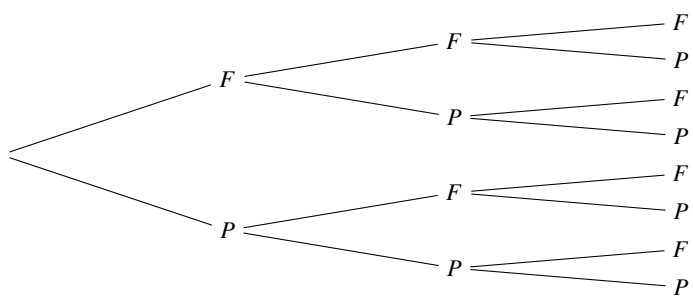
2. Quel est le nombre de sous-ensemble à 2 éléments ? En faire la liste.

$$\{a,b\} \qquad \{a,c\} \qquad \{a,d\} \qquad \{a,e\} \qquad \{b,c\} \qquad \{b,d\} \qquad \{b,e\} \qquad \{c,d\} \qquad \{c,e\} \qquad \{d,e\}$$

3. En déduire les valeurs suivantes des coefficients binomiaux.

$$\binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10$$

! Le nombre $\binom{n}{k}$ peut aussi s'interpréter comme le nombre de façon (le nombre de chemin dans l'arbre de probabilité) d'obtenir $k$ fois pile lors de $n$ lancers d'une pièce. Par exemple, l'arbre de probabilité pour trois lancers de pièces est le suivant




On obtient alors

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

## 3.2 Calcul des coefficients binomiaux

**Proposition 3.4** Soient $n,k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

? On a $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, car, par exemple, on ne peut pas trouver un sous-ensemble de cardinal 15 d'un ensemble qui contient seulement 10 éléments...

! Pour calculer un coefficient binomial, on fait le maximum de **simplifications** entre le numérateur et le dénominateur avant de faire le calcul.

**Exemple 3.5** En utilisant cette formule, on obtient :

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times 1} = 3 \qquad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2} = 10$$

**Proposition 3.6 — Cas particuliers à connaître.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n.$$

On a

- $\binom{n}{0} = 1$ car, pour tout ensemble contenant $n$ éléments, il n'y a qu'un seul sous-ensemble contenant zéro élément qui est l'ensemble vide ;
- $\binom{n}{n} = 1$ car, pour tout ensemble contenant $n$ éléments, il n'y a qu'un seul sous-ensemble contenant $n$ éléments qui est l'ensemble tout entier ;
- $\binom{n}{1} = n$ car, pour tout ensemble contenant $n$ éléments, il y a exactement $n$ sous-ensembles contenant 1 élément.

On a l'habitude de représenter les coefficients binomiaux dans un tableau, avec l'entier $n$ en ligne et l'entier $k$ en colonne. Ainsi, la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se trouve à l'intersection de la $n$-ième ligne et $k$-ième colonne. Pour remplir les cases de ce tableau, on utilise la **formule de Pascal** qui permet de déduire une ligne de la précédente.

**Proposition 3.7 — Formule de Pascal.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Soient $E$ un ensemble à $n$ éléments et $F = E \cup \{x\}$ un ensemble à $n+1$ éléments. Pour choisir $k$ éléments parmi les $n+1$ éléments de l'ensemble $F$,

- soit on en choisit $k$ parmi les $n$ éléments de l'ensemble $E$, il y a alors $\binom{n}{k}$ possibilités,
- soit on choisit l'élément $x$ puis $k-1$ éléments parmi les $n$ éléments de l'ensemble $E$, il y a alors $\binom{n}{k-1}$ possibilités.

D'où

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | | | | | | |
| $n=1$ | 1 | 1 | | | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | 1 | | | | |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| $n=5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| $n=6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| $k:$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | | | | 1 | | | |
| $n=1$ | | | 1 | | 1 | | |
| $n=2$ | | 1 | | 2 | | 1 | |
| $n=3$ | 1 | | 3 | | 3 | | 1 |
| $n=4$ | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |
| $n=5$ | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 |
| $n=6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| $k:$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

**Exemple 3.8** Sur le tableau, on peut lire les valeurs suivantes :

$$\binom{5}{2} = 10, \qquad \binom{3}{2} = 3, \qquad \binom{4}{3} = 4.$$

On remarque une symétrie dans le tableau, donnée par la formule suivante.

**Proposition 3.9 — Symétrie.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Choisir $n-k$ éléments parmi $n$ revient à choisir les $k$ éléments exclus parmi les $n$. D'où la symétrie des coefficients binomiaux.

**Exemple 3.10** On a

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

## 3.3 Formule du binôme de Newton

**Proposition 3.11 — Formule du binôme de Newton.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Autrement dit,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

À l'aide du triangle de Pascal, les coefficients binomiaux apparaissant dans la formule sont ceux correspondant à la ligne $n$ du tableau. De plus, les puissances de $b$ augmentent quand celles de $a$ diminuent, et la somme des puissances vaut toujours $n$.

**Exemple 3.12**

| Exemple | Coeff. Bin. associés | Développement |
|---|---|---|
| $(a+b)^2$ | 1 2 1 | $a^2+2ab+b^2$ |
| $(a+b)^3$ | 1 3 3 1 | $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ |
| $(a-b)^3$ | 1 3 3 1 | $a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ |
| $(a+b)^4$ | 1 4 6 4 1 | $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ |
| $(a-b)^5$ | 1 5 10 10 5 1 | $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$ |

**Exemple 3.13** Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(2x+1)^3$.

On a

$$\begin{aligned}(2x+1)^3 &= (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 1 + 3\cdot(2x)\cdot 1^2 + 1^3 \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1\end{aligned}$$

**Exemple 3.14** Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(x-3)^3$.

On a

$$\begin{aligned}(x-3)^3 &= x^3 + 3\cdot x^2\cdot(-3) + 3\cdot x\cdot(-3)^2 + (-3)^3 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27\end{aligned}$$

*Preuve du binôme de Newton.* Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{P}(n) : « (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k »$$

**Initialisation :** Montrons que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k.$$

- D'une part, $(a+b)^0 = 1$.
- D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b^k a^{n+1-k}.$$

On a,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} && \text{par hyp. de rec.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^{k+1} a^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} b^{\ell} a^{n-\ell+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} && \text{changement d'indice} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} b^k a^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} b^k a^{n-k+1} + b^{n+1}a^0 + b^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) b^k a^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} b^k a^{n-k+1} + b^{n+1} && \text{formule de Pascal} \\
&= \binom{n+1}{0} b^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} b^k a^{n-k+1} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} a^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b^k a^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

**Conclusion :** d'après le principe de récurrence, la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}.$$

■